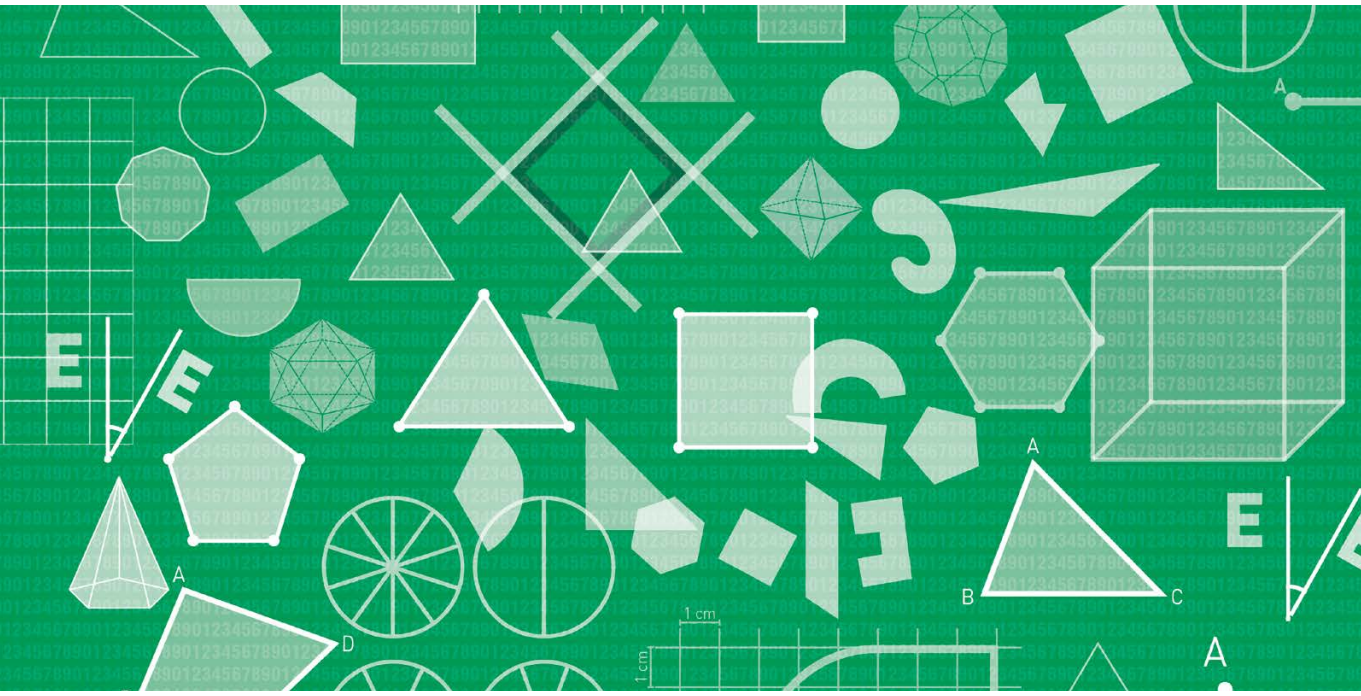


O ENSINO DA GEOMETRIA E DAS PRÁTICAS DE MEDIÇÃO A SERVIÇO DE UMA MATEMÁTICA COM SIGNIFICADO

Módulo III

Klabin Semeando Educação

Klabin

OBJETIVOS KLABIN PARA O DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Em 2015, a Organização das Nações Unidas lançou 169 metas a serem cumpridas até 2030. Essas metas foram divididas em 17 categorias, com o objetivo de transformar o mundo. Elas foram chamadas de Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, ou ODS.

Aqui na Klabin, o compromisso de conservar a natureza e construir um futuro sustentável faz parte do nosso DNA. Não é por acaso que cuidamos dos ecossistemas das regiões onde atuamos, investimos em soluções para que nossas operações industriais sejam mais eficientes e usem menos recursos naturais e buscamos parcerias locais.

Pensando no que os ODS propõem e na visão de mundo da Klabin, em 2016 aderimos voluntariamente aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável e priorizamos 14 itens para criarmos a nossa própria Agenda Klabin 2030.

A agenda tem 23 temas materiais e seus 25 objetivos de curto, médio e longo prazo, os quais chamamos de KODS - Objetivos Klabin para o Desenvolvimento Sustentável.

O Klabin Semeando Educação tem objetivos intrínsecos voltados à melhoria da educação pública. Suas práticas ocorrem através do apoio às Secretarias de Educação dos municípios onde a Klabin S/A atua, oportunizando práticas impulsionadoras de gestão e formação escolar na busca de uma educação pública mais equitativa, mais inclusiva e de qualidade.

A partir das quatro frentes de trabalho – Gestão Educacional, Formação Pedagógica, Recursos e Infraestrutura e Práticas Avaliativas – o foco do Klabin Semeando Educação é um compromisso para que a empresa também possa contribuir com a meta desafiadora do ODS 4 - Educação com Qualidade ao longo da vida de todos e todas.

O Caderno de Formação que você acaba de receber é mais um dos instrumentos oferecidos por este Programa para apoiar a formação contínua do público participante.

Aproveitem! Boa leitura!

O ENSINO DA GEOMETRIA E DAS PRÁTICAS DE MEDIÇÃO A SERVIÇO DE UMA MATEMÁTICA COM SIGNIFICADO

Módulo III

Esta publicação integra o material pedagógico produzido e adotado pela Interação Urbana no projeto Klabin Semeando Educação.
© Interação Urbana - Todos os direitos reservados.

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Cândido, Patrícia Terezinha
O ensino da geometria e das práticas de medição a serviço de uma matemática com significado : módulo III / Patrícia Terezinha Cândido, Adilson Dalben ; coordenação Patrícia Terezinha Cândido. -- 1. ed. -- São Paulo : Cidadela Comunicações : Interação Urbana, 2020.

ISBN 978-65-991907-9-7 (Cidadela Comunicações)

1. Geometria - Estudo e ensino 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Professores - Formação I. Dalben, Adilson. II. Título.

20-43386 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Geometria : Estudo e ensino 510.7
Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

1ª edição / 1ª reimpressão
São Paulo, julho de 2021

Uma primeira conversa

Neste terceiro módulo do curso de Matemática trataremos de assuntos ligados às unidades temáticas de Geometria e de Grandezas e Medidas. Por serem duas temáticas muito presentes no cotidiano das pessoas, a abordagem dos objetos de conhecimento inerentes a elas, com o objetivo de atribuir-lhes significado, parece não ser uma tarefa tão difícil.

Parece não ser difícil porque, nessa perspectiva, o maior obstáculo seria apenas desvelar ou estabelecer relações entre os objetos de conhecimento e os elementos geométricos existentes no mundo e nas práticas de medição presentes nas atividades cotidianas das pessoas. No entanto, as distâncias conceituais e procedimentais existentes entre essa matemática do dia a dia, a matemática acadêmica e a matemática escolar dificultam o desvelamento da matemática existente no cotidiano ou o estabelecimento de relações entre essas matemáticas, tornando-se o obstáculo a ser superado nas salas de aulas (embora esses desvelamentos ocorram também em outros ambientes, com as mais diversas práticas sociais).

Ajudar os alunos a superar estes obstáculos é um dos inúmeros propósitos dos professores que ensinam matemática e, por conseguinte, das escolas e do sistema educacional.

Este módulo, com a ajuda de muitas das pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática, tem como objetivo ampliar o conhecimento matemático e pedagógico dos professores, para que estes possam melhor ajudar seus alunos a aprenderem os objetos de conhecimento relacionados à Geometria e às práticas de medição, que começam nos Anos Iniciais da Educação Básica – e até mesmo na Educação Infantil, quando as noções iniciais devem começar a ser desenvolvidas.

Sumário

7 **Introdução**
Uma proposta de trabalho sobre Geometria e Grandezas e Medidas deve encorajar os estudantes a desenvolver e conservar uma curiosidade acerca da matemática, adquirindo diferentes formas de perceber a realidade.

12 **Parte I – Geometria**

15 **1. Análise de algumas crenças acerca do ensino de Geometria**
Este capítulo trata da influência das concepções egípcia e grega no currículo escolar; da necessidade de problematização, experimentação e investigação na Geometria; da visualização entre o concreto e o abstrato; e de uma teoria para fundamentar a especificidade do ensino e da aprendizagem na Geometria.

43 **2. Os objetos de conhecimento de Geometria e as habilidades especificadas na BNCC**
Consideram-se aqui os elementos geométricos e suas propriedades; movimentação e localização; transformações geométricas e recomendações finais.

96 **Parte II – Grandezas e Medidas**

99 **3. Aspectos subjacentes e importantes para o ensino de medição**
Aspectos subjacentes e importantes para o ensino de medição; discernimento entre Grandezas e Medidas; a gênese das Grandezas e Medidas e uma abordagem sobre medir e comparar integram este capítulo.

115 **4. Os objetos de conhecimento de Grandezas e Medidas. A Geometria e as habilidades especificadas na BNCC**
O capítulo destaca as ideias gerais de medição; a medição associada às formas geométricas; a medição de tempo, a medição de temperatura e o sistema monetário.

Referências bibliográficas 146

FICHA TÉCNICA
Coordenação geral: Mauro Zanin e Marco Aurélio de Lima e Myrrha
Coordenação técnica: Patrícia Terezinha Cândido
Elaboração: Adilson Dalben
Preparação de texto e edição: Eder Santin / Cidadela Editora
Ilustrações: André Xavas (páginas 24, 45, 100, 119, 120, 123)
Serviços editoriais: Act Design Gráfico

Introdução

Uma proposta de trabalho sobre Geometria e Grandezas e Medidas deve encorajar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas, de modo que os estudantes desenvolvam e conservem com prazer uma curiosidade acerca da matemática adquirindo diferentes formas de perceber a realidade.

Uma proposta desse tipo incorpora os contextos do mundo real, as experiências e a linguagem natural dos estudantes no desenvolvimento das noções matemáticas, sem, no entanto, esquecer que a escola deve fazer o aluno ir além do que ele parece saber, tentando compreender como ele pensa, que conhecimento traz de sua experiência no mundo, e fazendo interferências no sentido de levar cada aluno a ampliar progressivamente suas noções matemáticas.

É importante destacar também o quanto os conhecimentos matemáticos são inseparáveis. Por isso, não é possível construir um novo conhecimento matemático sem que ele seja alicerçado por outros conhecimentos já construídos - daí surge o modelo de conhecimento em rede. Ou seja, o ensino de Geometria ou as práticas de medidas não são possíveis um sem o outro, contando com a presença dos conhecimentos de números e operações.

Os cuidados com o ensino da Geometria precisam ser relevantes, porque ele tem sido negligenciado há várias gerações. Um dos impactos dessa negligência é a fragilidade notada no nível de conhecimento (qualidade e quantidade) necessário para o ensino da Geometria. Essa fragilidade precisa ser atacada com seriedade e compromisso, uma vez que o conhecimento dos professores é um dos fatores mais determinantes na aprendizagem dos alunos (HILL, ROWAN e BALL, 2005; BALL, HILL e BASS, 2005; GROSSMAN, 2010), para além dos outros que imperam fora das salas de aula e até das escolas.

Por que o ensino da Geometria foi negligenciado?

As pesquisas mostram basicamente dois motivos, ambos potencializados pela dificuldade dos próprios professores, por não terem a devida formação inicial e pela inexistência da formação continuada para suprir as deficiências provocadas na formação inicial:

1) Os livros didáticos (referência sobretudo para aqueles que têm dificuldades) valorizavam demasiadamente definições com linguagem estritamente matemática, aplicação de fórmulas (sem a devida compreensão) e demonstrações. Nesses livros, os conteúdos de geometria sempre ficavam nos capítulos finais e, devido à falta de tempo, não chegavam a ser trabalhados com os alunos. A geometria era vista como um complemento (LORENZATO, 1995).

2) Em um contexto histórico-político, com a promulgação da Lei 5.692/71 (BRASIL, 1971), os professores podiam fazer seus planos de ensino buscando atender às necessidades dos alunos, mas diante das dificuldades que os próprios professores tinham, quando incluíam a Geometria, esta era colocada no final do curso, usando a falta de tempo como justificativa para não abordá-la (PAVANELLO, 1993).

Os cuidados com o ensino da Geometria, além de relevantes, são também peculiares, porque a forma pela qual se aprendem os objetos de conhecimento geométrico é diferente daquela necessária para aprender os objetos de outros ramos da matemática.

Ensinar Geometria tem suas especificidades em relação a ensinar números, por exemplo. Cada tópico requer conhecimentos e habilidades mentais diferentes. Além disso, as práticas com números são diferentes daquelas que envolvem e Geometria e medições.

Muitos acreditam, equivocadamente, que o ensino da Geometria é mais fácil por lidar com objetos manipuláveis. O equívoco está no fato de as práticas com Geometria requererem também a capacidade de abstração, semelhante necessidade de generalização (desenvolvimento do pensamento algébrico) e de visualização abstrata (construção mental das imagens).

Quando os professores se referem às formas geométricas planas, como retângulos, quadrados e triângulos, as tratam como se fossem objetos concretos, embora, na verdade, sejam abstrações. Sempre conseguimos visualizar figuras planas, mas apenas visualizamos, ou seja, construímos uma imagem mental dessas figuras, pois de fato elas não existem. Afinal, ninguém consegue pegar um retângulo. Conseguimos apenas visualizar um retângulo em uma das faces de algum objeto tridimensional, como por exemplo no tampo de uma mesa retangular.

Por outro lado, assumimos a relevância e importância do uso de materiais manipulativos no ensino da Geometria, entendendo que seu uso planejado é um caminho para tornar o processo de aprendizagem significativo. Sobre o significado de aprendizagem significativa, trataremos mais a seguir.

Ainda sobre o papel dos materiais manipulativos para a aprendizagem da Geometria e das Grandezas e Medidas, recorremos a Lévy (1993) para entender que os materiais manipulativos podem ser representações de ideias matemáticas. Para esse autor, os materiais podem ser entendidos como representações materializadas de ideias e propriedades. Nesse sentido, para ele, a simulação desempenha um importante papel na tarefa de compreender e dar significado a uma ideia, correspondendo às etapas da atividade intelectual anteriores à exposição racional, ou seja, anteriores à conscientização. Algumas dessas etapas são a imaginação, a bricolagem mental, as tentativas e os erros, que se revelam fundamentais no processo de aprendizagem da matemática.

Segundo Smole (2012, p.12), para o referido autor a simulação não é entendida como a ação desvinculada da realidade do saber ou da relação com o mundo, mas antes um aumento de poderes da imaginação e da intuição. Nas situações de ensino com materiais, a simulação permite que o aluno formule hipóteses, inferências, observe regularidades, ou seja, participe e atue em um processo de investigação que o auxilia a desenvolver noções significativamente, ou seja, de maneira refletida.

Outro aspecto relevante do trabalho com os materiais manipulativos é a possibilidade de desenvolvimento da linguagem geométrica e métrica, pois os alunos naturalmente verbalizam e discutem suas ideias enquanto trabalham com os materiais.

Ainda para ampliarmos nosso olhar a respeito da prática do ensino da matemática com o uso de materiais manipulativos, buscamos em Smole (1996, p.172):

> *Dadas as considerações feitas até aqui, acreditamos que os materiais didáticos podem ser úteis se provocarem a reflexão por parte das crianças, de modo que elas possam criar significados para as ações que realizam com eles. Como afirma Carraher (1988), não é o uso específico do material com os alunos o mais importante para a construção do conhecimento matemático, mas a conjunção entre o significado que a situação na qual ele aparece tem para a criança, as suas ações sobre o material e as reflexões que faz sobre tais ações.*

Esses aspectos do ensino da Geometria são apontados já no início deste módulo porque são considerados como pressupostos centrais para que o ensino da Geometria e das práticas de medição permita aos alunos atribuírem significado ao que precisam aprender nessas duas unidades temáticas.

Nesse sentido, a proposta deste material está fundamentada, entre outros aspectos, na crença de que, para além das habilidades linguísticas e lógico-matemáticas, é necessário que os alunos tenham chance de ampliar suas competências espaciais, pictóricas, corporais, musicais, interpessoais e intrapessoais. Ao mesmo tempo, cremos que tais competências, quando contempladas nas ações pedagógicas, servem como rotas ou caminhos diversos para que os alunos possam aprender matemática.

É preciso reconhecer ainda que os alunos necessitam de um tempo considerável para desenvolver os conceitos e as ideias matemáticas trabalhadas pela escola e também para acompanhar encadeamentos lógicos de raciocínio e comunicar-se matematicamente. Isso significa que, nas aulas de matemática da Educação Infantil e da escola básica, é essencial o contato constante e planejado com as noções matemáticas em diferentes contextos, ao longo de um ano e de ano para ano.

Esse olhar para o ensino da Geometria e das Grandezas e Medidas coloca luz no que, de fato, pode promover a aprendizagem. Ou seja, para que a aprendizagem ocorra ela deve ser significativa. Segundo Smole (2003, p.10), para que a aprendizagem seja significativa, exige-se dela que:

- Seja vista como a compreensão de significados.
- Relacione-se com experiências anteriores, vivências pessoais e outros conhecimentos.
- Permita formulação de problemas de algum modo desafiantes, que incentivem o aprender mais.
- Permita o estabelecimento de diferentes tipos de relações entre fatos, objetos, acontecimentos, noções, conceitos etc.
- Permita modificações de comportamentos.
- Permita a modificação do que é aprendido em diferentes situações.

Falar em aprendizagem significativa é assumir que aprender possui um caráter dinâmico, exigindo que as ações de ensino se direcionem para que os alunos aprofundem e ampliem os significados que elaboram mediante suas participações nas ações de ensino e aprendizagem. Esses pressupostos levam à busca por práticas que permitam aos alunos experienciar, problematizar, sistematizar, representar e construir conhecimentos.

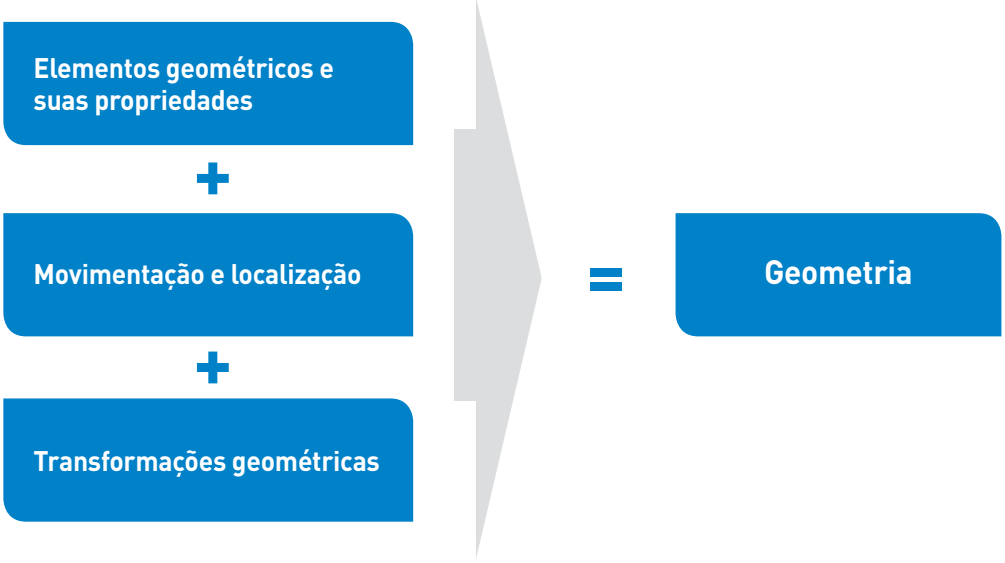
Essa proposta com foco em aulas investigativas (PONTE; BROCARDO e OLIVEIRA, 2003) ou que envolvem a resolução de problemas (POZO et al., 1990), também no ensino da Geometria e das Grandezas e Medidas requer um processo docente devidamente planejado e orientado por esses pressupostos, para que o processo de aprendizagem seja também mediado e constantemente avaliado pelo professor. Avaliado não para a mera atribuição de notas, mas sim para que o professor e os alunos tenham elementos para melhor ajustarem a aprendizagem.

Será por meio de práticas com essas características que as habilidades associadas aos objetos de conhecimento e, principalmente, as competências (cognitivas e socioemocionais) especificadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) serão desenvolvidas de forma mais plena, tanto na unidade temática de Geometria quanto na de Grandezas e Medidas.

Parte I

Os objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades elencadas na unidade temática de Geometria são bastante abrangentes e requerem um tempo significativo para serem devidamente abordados.

Para a elaboração deste módulo, os objetos de conhecimento e as habilidades a eles associadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) foram sintetizados em três grupos, devido à priorização que receberam na BNCC: Elementos geométricos e suas propriedades; Movimentação e localização e Transformações geométricas.



Geometria

Antes de partirmos para os três tópicos, é importante rever e substituir algumas crenças sobre o ensino da Geometria:

a) Há pelo menos duas origens da Geometria que influenciaram e ainda influenciam o seu ensino, e outras que são comumente desconsideradas.

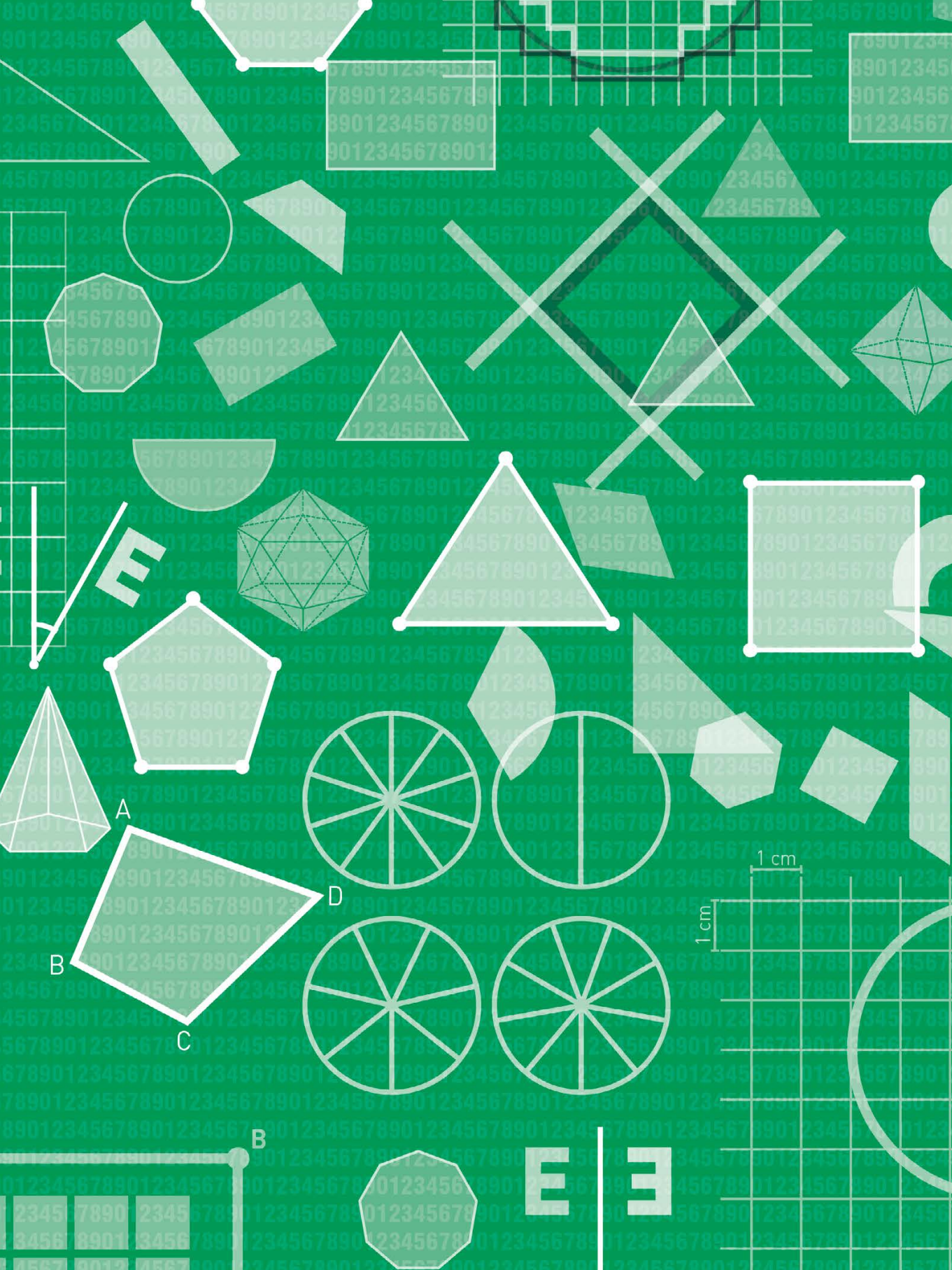
b) As definições, conceitos e nomenclaturas presentes na Geometria não são definitivas.

c) A visualização é uma abstração, mesmo quando o trabalho é feito com recursos manipuláveis.

d) A Geometria tem um modo particular de ser ensinada, porque também é especial a forma como é aprendida.

Cada uma dessas crenças é analisada nas próximas seções.

Diante desta proposta, a primeira parte do módulo, que contempla de maneira central a Geometria, está assim organizada.


A
B
C
D
1 cm
1 cm
B

1 Análise de algumas crenças acerca do ensino de Geometria

1.1. Influência das concepções egípcia e grega no currículo escolar

As diferentes origens da Geometria e de seu estudo influenciam a forma contemporânea de ensinar Geometria. O resgate desse componente histórico é relevante porque, muitas vezes, essa influência não é percebida. Basicamente, duas concepções vêm se alternando na constituição curricular no último século.

Uma das concepções é de origem egípcia e se caracteriza por seu vínculo às práticas socioculturais cotidianas, tornando muito intuitiva a abordagem dos temas geométricos. São exemplos dessa concepção as situações usadas pelos professores ligando o surgimento da Geometria à divisão da terra e às obras arquitetônicas, ou ainda os estudos astronômicos dos babilônios relacionados ao cálculo de áreas acerca das quadraturas de lúnulas, posteriormente sistematizado pelos gregos.

Curiosamente, nessas duas situações os professores explicitam também a indissociabilidade entre as unidades temáticas de Geometria e de Grandezas e Medidas. Para Miguel et. al. (2009), a própria etimologia da palavra geometria traz essa relação: geo = terra, metria = medida.

> *O estudo do cálculo de áreas foi uma constante entre as antigas civilizações. Os métodos de determinação de muitas figuras geométricas fundavam-se basicamente na decomposição de tais figuras e posterior composição em outras de áreas conhecidas. (MIGUEL et. al., 2009, p. 21)*

Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto:

Na figura da colmeia é possível visualizar a presença de vários polígonos chamados hexágonos.

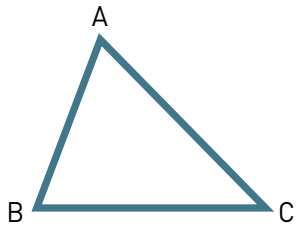
Você consegue visualizar o hexágono nesta bola?

- Usando palitos, represente-o sobre seu caderno. Quantos palitos foram necessários? Quantas vezes os palitos se tocam? Registre a figura em seu caderno.
- Observando a bola novamente, você consegue ver outro polígono? Se sim, use os palitos para representá-lo e depois registre em seu caderno.
- Quantos palitos você usou para construir essa nova figura? E nela, quantas vezes os palitos se tocaram? Registre em seu caderno.
- Onde mais você consegue visualizar esses dois polígonos?

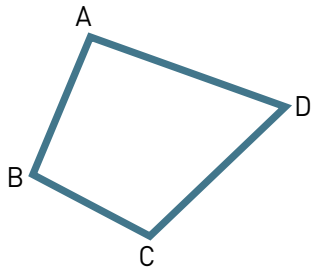
Esta é uma tarefa influenciada pela concepção egípcia, uma vez que ela valoriza a visualização dos elementos geométricos presentes no cotidiano e lida com essa percepção de maneira mais empírica. A nomenclatura é apresentada ao estudante como identificação associada a um contexto.

A outra concepção, de origem grega, se contrapõe à intuição e valoriza o pensamento racional (a lógica), presente nas demonstrações e deduções. Esta segunda concepção privilegia o rigor, a formalidade e a abstração. Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto.

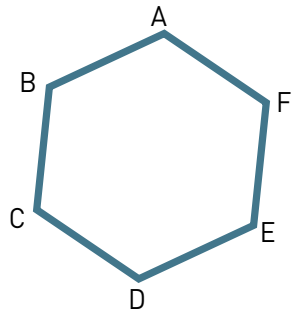
Observe os polígonos a seguir e registre o número de lados e vértices que cada um tem.



Este polígono tem _____ lados e _____ vértices.



Este polígono tem _____ lados e _____ vértices.



Este polígono tem _____ lados e _____ vértices.

Esta é uma tarefa em que a influência da Geometria grega está presente, por valorizar os elementos geométricos abstratos, tais como o ponto, a reta e o plano. Vale a pena lembrar que são abstratos porque:

- O plano tem apenas duas dimensões: o comprimento e a largura, não tendo espessura.
- A reta tem apenas uma dimensão: o comprimento, não tendo largura e espessura.
- O ponto não tem dimensões.

Atente-se ainda que as três figuras são imagens mentais, visualizações, ou seja, abstrações.

Ao longo do tempo, as duas concepções estiveram presentes na organização curricular do Brasil (e, portanto, também nos livros didáticos), sendo um dos fatores orientadores da ação pedagógica do professor. A concepção grega predominou durante o período da Matemática Moderna, sendo depois substituída pela egípcia, após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997).

Concepção egípcia

- Intuitiva
- Aplicada no dia a dia

Concepção grega

- Demonstrações
- Lógica e abstrações

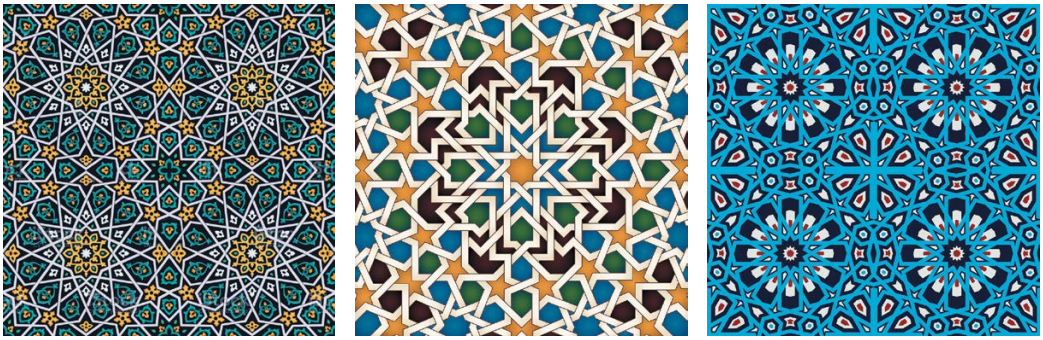
O discernimento sobre essas duas concepções é importante para que os professores possam manter a coerência entre o que solicitam a seus alunos nas tarefas que planejam e as respostas deles esperadas, perpassando pela forma como os alunos poderão construir as soluções, uma vez que as duas concepções têm propósitos distintos, mas podem ser complementares.

Além disso, precisamos considerar todo o conhecimento geométrico constituído a partir de culturas indígenas americanas e africanas, assim como de outros povos do mundo. A Geometria presente nessas outras culturas é igualmente rica, não só de elementos geométricos, mas também de outros elementos matemáticos.

Cestaria indígena Kaingang - Chapecó - SC

Fonte: Sufiatti, Bernardi e Duarte (2013)

Padrões geométricos islâmicos



Fonte: Thalal et al (2011)

1.2. Na Geometria também deve haver problematização, experimentação e investigação

Outra característica acerca do ensino da Geometria, que vem se consolidando ao longo do tempo, é o modelo de aula em que o propósito se limita à memorização de nomenclaturas, definições, classificação e procedimentos, em detrimento de propostas de ensino que propiciam a experimentação e a problematização.

Quando a opção do ensino segue esse primeiro modelo, e não o segundo, é perdida a oportunidade de desenvolver, também em Geometria, as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, previstas na BNCC (BRASIL, 2017, p. 267), tais como:

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (Competência 2)

- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (Competência 3)

- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. (Competência 4)

- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Competência 8)

O desenvolvimento destas competências requer que o ensino da Geometria, assim como dos diversos ramos da Matemática agrupados nas cinco unidades temáticas propostas na BNCC (BRASIL, 2017), seja composto por tarefas que permitam o debate entre os alunos, para que eles possam levantar conjecturas e, depois de um processo de validação, cheguem às conclusões. Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto.

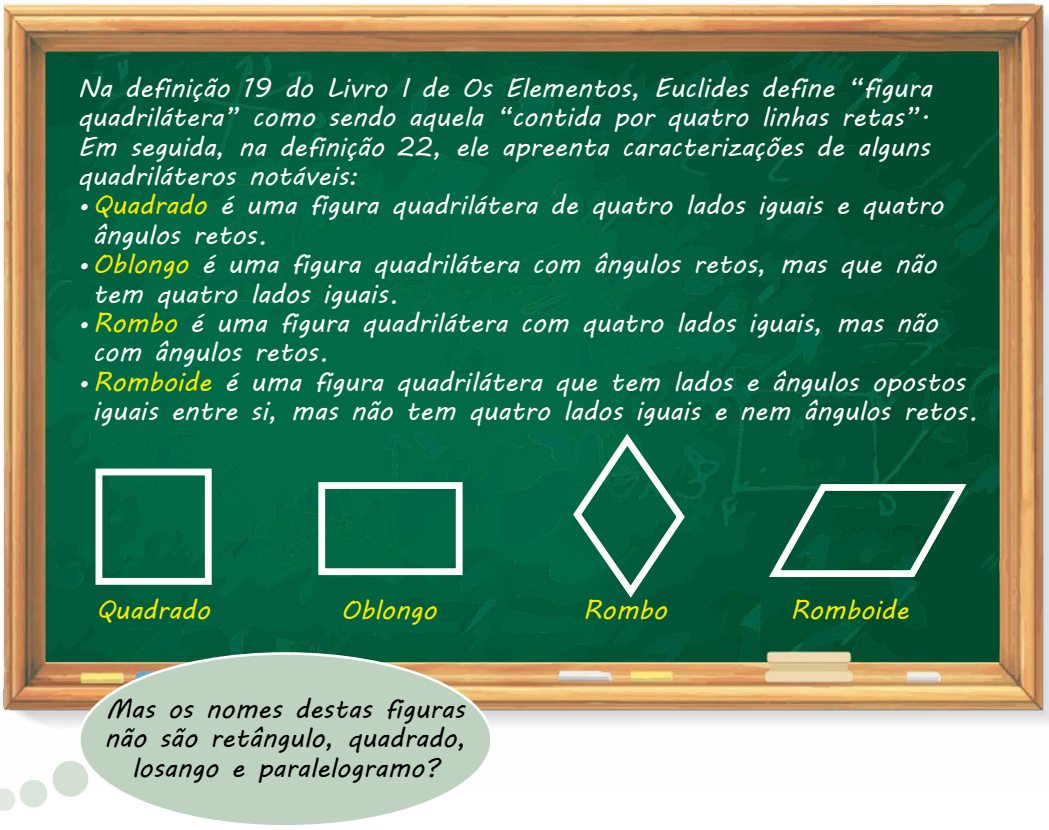
O retângulo é um paralelogramo?

Tradicionalmente, a maioria dos professores e autores de livros escolares simplesmente fornece aos alunos conteúdo pronto (definições, teoremas, comprovações, classificações etc.), para que eles meramente tenham de assimilá-lo e regurgitá-lo em testes e provas. Esse tipo de ensino tradicional de Geometria pode ser comparado a uma aula de culinária na qual o professor simplesmente mostra aos alunos bolos (ou pior, apenas fotos de bolos), sem jamais mostrar a eles o que vai dentro do bolo e como ele é preparado. E mais, eles nem mesmo têm a oportunidade de tentar cozinhar por si próprios!

Matemáticos e educadores de Matemática criticam bastante o ensino direto de definições de Geometria sem ênfase no processo subjacente da definição. [...] O simples fato de saber a definição de um conceito não garante a compreensão do conceito. Por exemplo, embora possam ter ensinado a um aluno, e ele seja capaz de dizer, a definição padrão de um paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos paralelos, o aluno pode ainda não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos, já que a imagem conceitual que os alunos têm de um paralelogramo é que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais. (VILLIERS, 2010, p. 411)

É importante destacar a necessidade de que o ensino da Geometria também se alinhe com a ideia de problematizar os objetos de conhecimento matemático, contrapondo, mais uma vez, com aquela ideia que os apresenta de maneira acabada. Diante disso, diferentemente da crença recorrente, na Geometria há casos em que são reconhecidas diferentes definições para um mesmo conceito.

É um equívoco pensar que todas as definições são únicas, uma vez que a Geometria, assim como a Matemática, é fruto de uma construção histórica, oriunda (elaborada e reelaborada) em função das necessidades identificadas pela humanidade.



Esta característica da Geometria, em que as definições e nomenclaturas não são prontas e acabadas, pode trazer bons frutos, uma vez que o debate diante da problematização favorece a atribuição de significados aos diferentes elementos geométricos identificados, suas propriedades e as relações entre eles.

Na prática, isso significa que, diante de uma determinada definição, uma resposta pode estar adequada, mas diante de outra (devido a outros questionamentos) ela precisar ser mais bem elaborada.

Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto:

E o quadrado é um retângulo?

A coerência é um valor muito importante na Matemática. A questão perturbadora sobre se um quadrado é ou não um retângulo, a que atualmente respondemos convictamente "sim", contrariando as convicções dos nossos alunos, poderia ter outra resposta: "depende". Mas depende de quê? Depende das definições que adotamos para os quadriláteros. Se a nossa definição de retângulo for "quadrilátero com todos os ângulos retos", o quadrado é um caso particular do retângulo. Mas se considerarmos a definição de Euclides (Elementos, Livro I, Silva, s.d.) que afirma que o retângulo "é a figura que, se uma parte for mais comprida, pode ser rectangula, mas não equilatera", então o quadrado deixa de ser considerado retângulo.

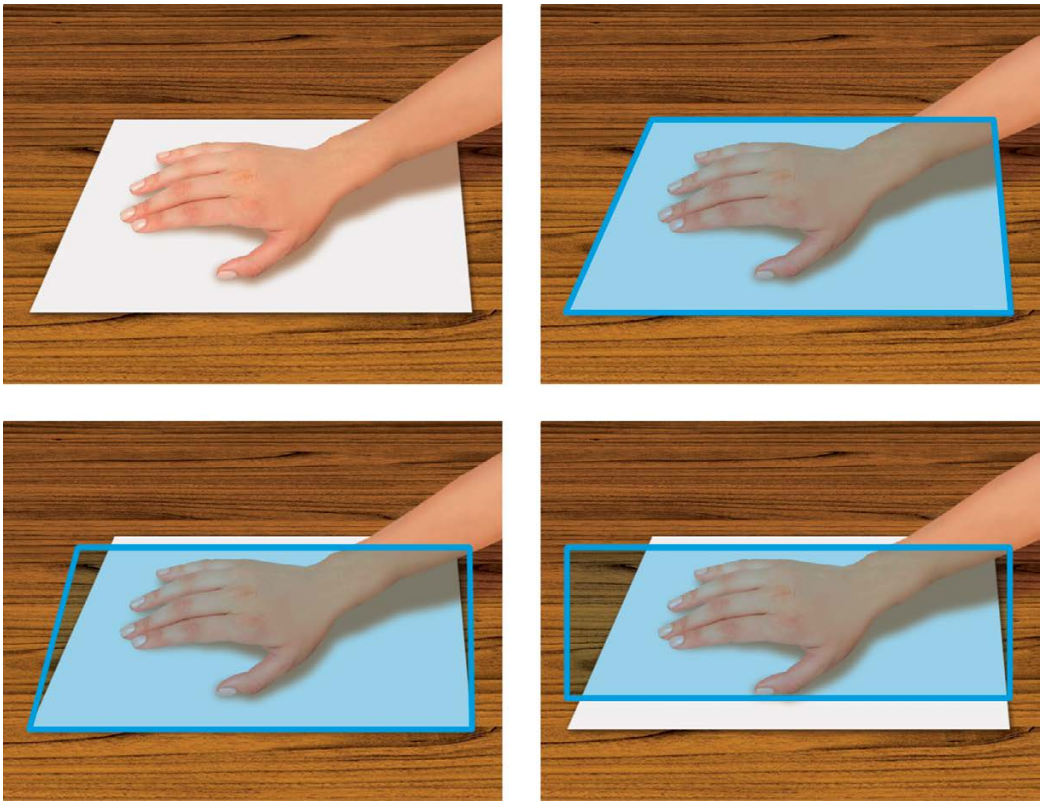
Euclides usava assim uma definição exclusiva que conduz a uma classificação partitiva, ou seja, que organiza separadamente os objetos, neste caso figuras geométricas. Se deixamos de adotar estas definições para alguns conceitos é porque existem várias vantagens nas definições inclusivas, como conduzirem a uma maior economia na formulação de definições ou teoremas e simplificarem a dedução de propriedades para os conceitos mais específicos (De Villiers, 1996). (Fonte: BRUNHEIRA, 2017, p. 33)

Metodologicamente, considerando essa característica, o ensino de Geometria pode também ser explorado na metodologia de resolução de problemas ou em aulas investigativas, tal como deve ocorrer no ensino dos demais ramos da Matemática.

1.3. A visualização na relação entre o concreto e o abstrato

Para explicitar essa relação, cabe a pergunta: qual a diferença entre um sólido geométrico e uma figura geométrica espacial (ou tridimensional)?

A diferença é análoga à percepção de um retângulo e uma folha de papel. A folha de papel é um sólido geométrico, é um prisma de base retangular, porém com uma de suas dimensões muito pequena em relação às demais. O retângulo é uma abstração, pois ele tem só duas dimensões. O retângulo é uma representação geométrica plana.



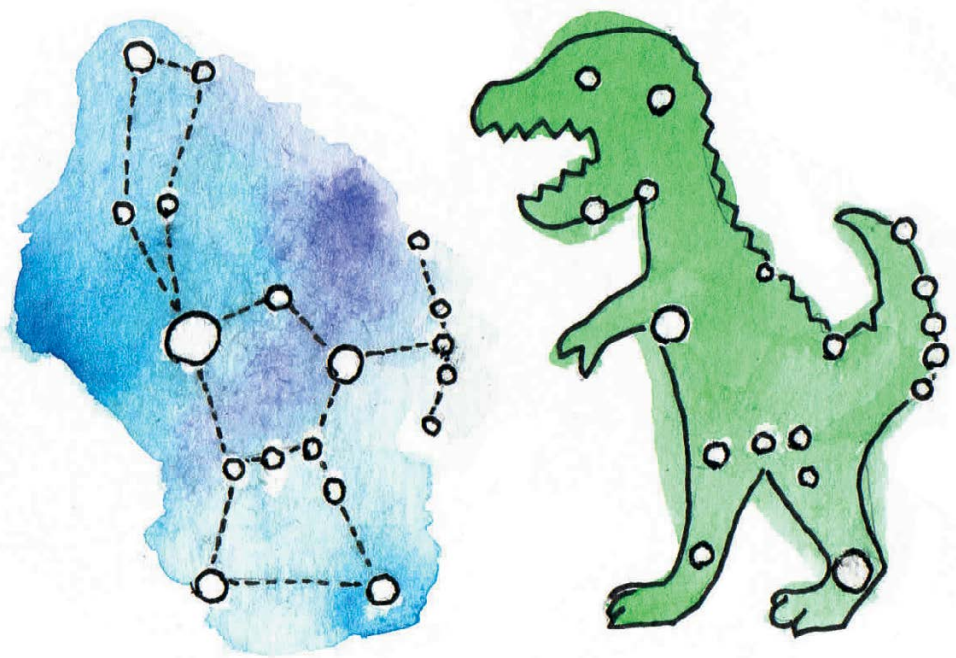
Um cubo, enquanto um sólido geométrico, tem material em seu interior e os comprimentos de suas arestas são iguais. Sua representação é uma figura geométrica tridimensional, que nada tem de simples em sua visualização.

Em seu livro, Fleron e Hotchkiss (2018) trazem uma história de um livro no qual um menino, que se autodescreve como um "matemático com algumas dificuldades comportamentais", ao observar a constelação de Orion, teria dito:

> *As pessoas chamam a constelação dessa maneira porque Orion era um caçador e a constelação parece um caçador com um porrete e um arco e flecha... Mas, isso é realmente bobo, porque são apenas estrelas, e você pode juntar os pontos em qualquer jeito que você queira, e você poderia fazer parecer uma dama com um guarda-chuva que está acenando, ou uma cafeteira que a Sra. Shears tem, que é italiana, com uma alça e vapor saindo, ou ainda um dinossauro. E como não existem linhas no espaço, você deve juntar pedaços de Orion a pedaços de Lepus, Touro ou Gêmeos e dizer que havia uma constelação chamada Cacho de Uvas ou Jesus ou Bicicleta (exceto que eles não tinham bicicletas nos tempos romano e grego, que foi quando eles a chamaram de Orion). De qualquer forma, Orion não é um dinossauro. São apenas Betelgeuse, Bellatrix, Alnilam, Rigel e outras 17 estrelas das quais não sei o nome. E são explosões nucleares a bilhões de quilômetros de distância. E essa é a verdade. (FLERON e HOTCHKISS, 2018, p. 9, tradução e grifos nossos)*

Essa possibilidade, de que qualquer um pode mentalmente juntar pontos da maneira que entende, quer e consegue, requer os cuidados de não tratar a visualização como algo trivial.

Duas possíveis visualizações a partir da Constelação de Orion



Fonte: Fleron e Hotchkiss (2018, p. 9)

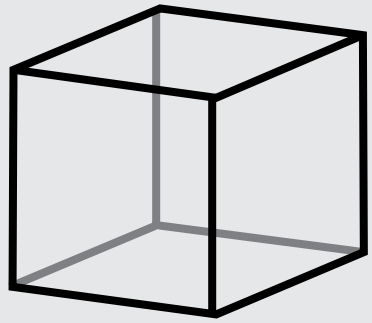
Por isso, antes de tudo, é importante entender o que é uma visualização. Para Nacarato e Passos (2003):

> *A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (NACARATO e PASSOS, 2003, p. 78)*

Ao olharmos as figuras a seguir parece fácil visualizar a forma geométrica do cubo. Essa simplicidade deixa de existir quando passamos a perceber que elas são representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Essa percepção por si só já permite perceber que a visualização não é uma operação mental simples, e permite valorizar a importância da teoria dos Van Hiele.

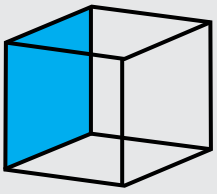
Sólido geométrico

Figura geométrica

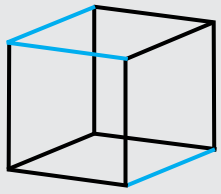


De maneira análoga, ao olhar as figuras a seguir, também parece ser simples a visualização das faces, arestas e vértices.

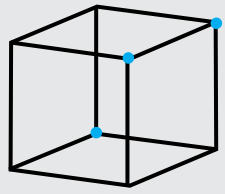
Face



Aresta



Vértice



No entanto, o exercício de visualizar outras propriedades do cubo - por exemplo, o número de faces, arestas e vértices - e sobretudo definir suas diversas medidas confirma a percepção de que a visualização é uma operação mental bastante complexa. Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto.

A figura geométrica que representa o cubo é composta por:

a) Seis faces. Cada uma das faces é uma figura geométrica bidimensional plana. Bidimensional porque tem comprimento e largura, mas tem espessura, consequentemente, a área de sua superfície pode ser medida, assim como o comprimento de seus lados. Cada face pertence a um plano diferente, que tomados dois a dois são paralelos.

b) Doze arestas. Cada aresta é uma figura geométrica unidimensional que é representada por um segmento de reta. Unidimensional porque tem apenas comprimento, não tendo, portanto, largura e espessura, consequentemente apenas seu comprimento pode ser medido. A aresta é um segmento de reta que, por sua vez, pertence a uma reta formada pela intersecção entre dois planos a que duas faces ortogonais pertencem. O tamanho da aresta, ou seja, do segmento de reta que representa a aresta, é delimitado pela distância entre os dois planos paralelos e que são ortogonais aos planos que resultaram na reta.

c) Oito vértices. Cada vértice é um ponto, uma figura adimensional por não ter comprimento, largura e espessura. É um ponto resultante da intersecção de três arestas.

Todo esse contexto foi exposto para avançarmos na percepção de que o pensamento geométrico será desenvolvido pela combinação da apresentação de imagens, manipulação de objetos e desenvolvimento da visualização.

A visualização é uma operação mental que requer muito cuidado, com o adequado uso da linguagem, da terminologia e das representações, além, é claro, da diversificação das estratégias de ensino, para que o ritmo da aprendizagem do aluno seja respeitado.

1.4. Uma teoria para fundamentar a especificidade do ensino e da aprendizagem na Geometria

Nas últimas décadas, a Teoria de Van Hiele tem sido uma das teorias relacionadas à aprendizagem da Geometria mais difundidas no Brasil e tem fundamentado a elaboração de algumas orientações metodológicas e propostas curriculares, dentre elas os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e mais recentemente a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017).

Trata-se de um modelo que representa o desenvolvimento do pensamento geométrico, colocando em cinco diferentes níveis as habilidades cognitivas dos alunos. Segundo essa teoria, a aprendizagem geométrica é efetiva quando ela começa do mais inferior dos níveis e só deve ir ao nível superior quando os conhecimentos de um determinado nível estiverem plenamente consolidados. A consideração dessa ordenação favorece a melhor elaboração dos planos de ensino e das aulas, evitando que lacunas da formação do aluno sejam ignoradas (LORENZATO, 2009a).

Será respeitando a evolução por esses níveis de conhecimento que o ensino da Geometria vai aderir ao propósito de um ensino da Matemática que atribua significado aos conhecimentos, habilidades, competências, valores e atitudes que os alunos precisam desenvolver nas escolas.

A Teoria de Van Hiele propõe que a evolução do pensamento geométrico seja paulatina e respeite o ritmo particular do aluno, partindo da exploração das formas gerais (mais baixo nível) até o que envolve o desenvolvimento das abstrações mais complexas (mais alto nível). Ou seja, essa teoria propõe que os alunos devem partir do reconhecimento das formas gerais, de maneira intuitiva, para que, somente nos níveis posteriores, sejam capazes de analisar as propriedades dessas formas. Somente nos dois níveis finais as capacidades dedutiva e demonstrativa podem ser exploradas, quando se articularem a intuição e a dedução, incluindo as demonstrações.

Um pouco dos marcos históricos da Teoria de Van Hiele

Essa teoria nasceu da tese de doutoramento de um casal polonês, Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, desenvolvida em 1957 na Universidade de Utrecht, Holanda. O trabalho foi aprimorado e divulgado por Pierre, após o falecimento de sua esposa.

O trabalho ganhou notoriedade após a sua adoção como referência na reformulação curricular da antiga União Soviética e, devido à disputa na corrida espacial, chegou aos Estados Unidos ainda na década de 1960. O livro "Matemática e Língua Materna", de Nilson José Machado, publicado em 1990, foi um dos trabalhos pioneiros a trazer essa teoria ao Brasil.

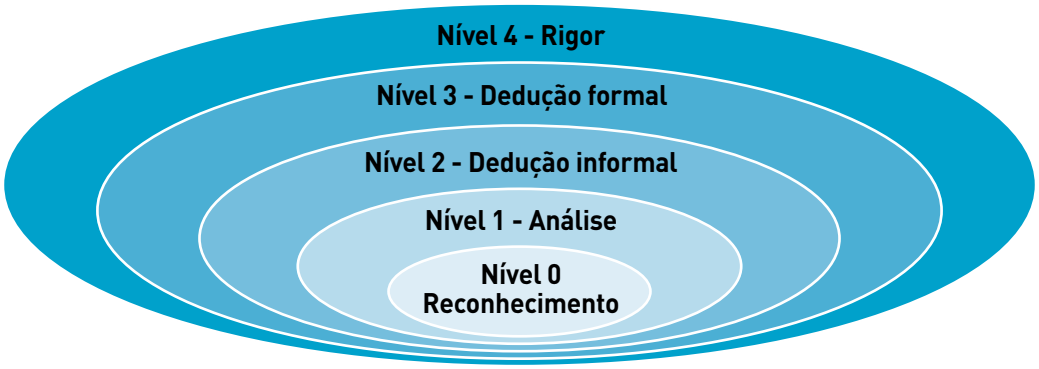
Fonte: KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. Bolema, v. 10, p. 21–30, 1994.

Basicamente, o casal Van Hiele se estimulou a desenvolver o modelo porque entendia que a estrutura curricular exigia capacidades dos alunos acima daquilo que seu nível de pensamento geométrico poderia propiciar (Villiers, 2010). Além disso, ambos entendiam que o desenvolvimento do pensamento geométrico depende da visualização, tal como Vergnaud (1996) defendeu décadas depois.

> *O olhar é particularmente importante. Na verdade, quando nós temos crianças com dificuldades permanentes, geralmente elas têm problemas de olhar. Elas não são cegas, absolutamente, elas veem muito bem. Mas elas têm problemas em organizar a sequência sucessiva. Vemos com isso que o gesto e o pensamento estão intimamente ligados. (VERGNAUD, 1996, p.12)*

Os cinco níveis de pensamento do modelo de Van Hiele são: Nível 0 - Reconhecimento, Nível 1 - Análise, Nível 2 - Dedução Informal, Nível 3 - Dedução Formal e Nível 4 - Rigor.

Níveis de pensamento proposto pelo casal Van Hiele



O esquema pretende explicitar, além dos cinco níveis de pensamento presentes na teoria, suas quatro características (ordem, adjacência, distinção e separação), que são indissociáveis e muito importantes para o professor não apenas conduzir suas aulas, mas também na montagem dos grupos de alunos, quando esta for sua opção metodológica.

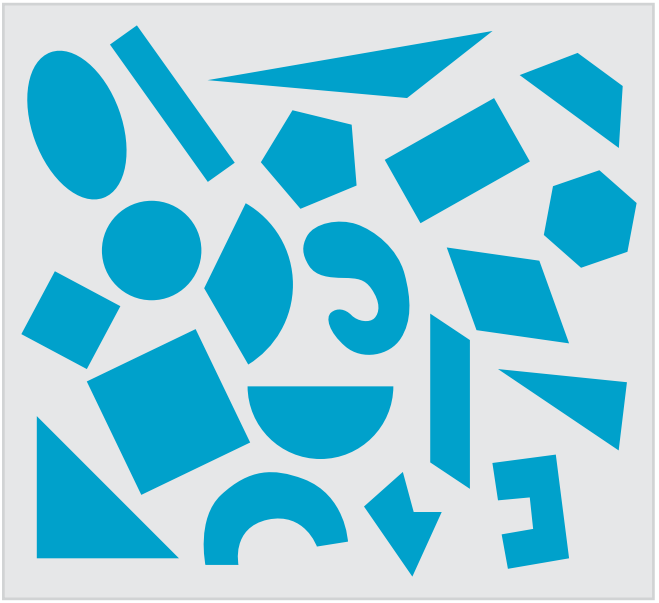
Nível 0 – Reconhecimento

Neste nível, os alunos reconhecem as figuras geométricas em sua totalidade não observando detalhes e conseguem fazer classificações pela aparência geral das figuras. São capazes também de reproduzir figuras dadas por meio de cópias e de assimilar vocabulários.

Os elementos geométricos, como paralelismo e ângulos, assim como a comparação entre os tamanhos dos lados, podem ser elencados e até denominados, no entanto apenas no âmbito da observação e não do estabelecimento de relações entre eles. Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto.

As tarefas a seguir, propostas por Walle (2009), podem ser tomadas como exemplo para o desenvolvimento do pensamento geométrico no Nível 0.

Organize os alunos para trabalharem em "quartetos aprendizes" com um conjunto de formas bidimensionais semelhantes àquelas apresentadas ao lado.



A tarefas apresentadas a seguir podem ser propostas aos alunos na ordem em que estão colocadas:

- Cada estudante escolhe, ao acaso, uma das formas da coleção. Na sua vez, cada aluno conta para o grupo uma ou duas coisas interessantes que descobriu sobre sua forma. Não há respostas certas ou erradas.
- Cada aluno seleciona ao acaso duas formas. A tarefa é descobrir alguma coisa que seja semelhante sobre as duas formas escolhidas e alguma coisa que seja diferente. Oriente-os para que escolham suas formas antes de saberem qual é a tarefa.
- O grupo seleciona uma forma ao acaso e a coloca no centro da mesa. Sua tarefa é descobrir todas as outras formas da coleção que são como a forma escolhida, mas todas de acordo com a mesma regra. Por exemplo, se disserem "essa figura é como a nossa forma porque possui um lado curvo e um lado reto", então todas as outras formas colocadas na coleção devem ter essas propriedades. Desafie-os a fazer um segundo agrupamento com a mesma forma escolhida, mas usando uma propriedade diferente.
- Peça que os alunos compartilhem suas regras de agrupamento com toda a turma e mostrem exemplos. Todos eles devem desenhar uma nova forma que também irá se encaixar no grupo de acordo com a mesma regra. Eles devem escrever sobre as propriedades de sua nova forma e dizer por que ela atende à regra.
- Faça um "Grupo Secreto". Você ou um dos alunos cria uma pequena coleção de cerca de cinco formas que se enquadram em uma regra secreta. Deixe as outras formas que pertencem a seu grupo na pilha. Os outros tentarão encontrar as outras peças que também pertencem ao conjunto e/ou descobrir a regra secreta.

Nível 1 – Análise

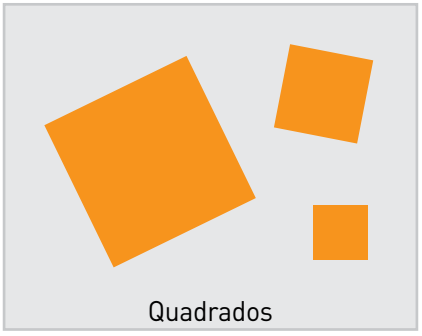
Neste nível, a análise de conceitos geométricos é possível, uma vez que os alunos são capazes de distinguir figuras por algumas de suas propriedades e características específicas.

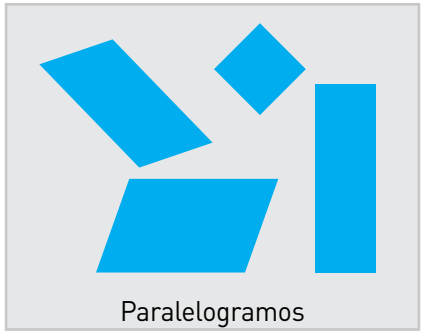
Lembre-se que as tarefas que tenham como objetivo classificar as figuras somente devem ser propostas para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos que estiverem no Nível 1. É nele que os alunos, apesar de ainda usarem modelos e a forma para interagirem, começam a percebê-los em distintas classes.

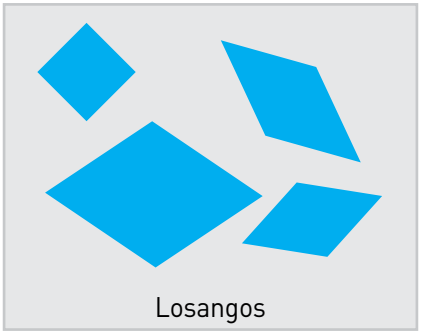
Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto:

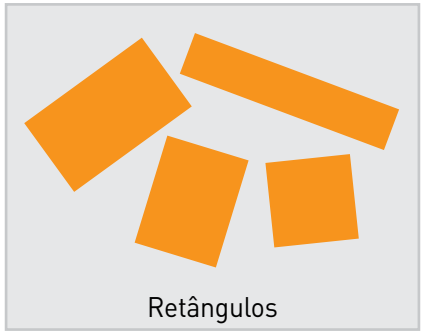
As tarefas a seguir, propostas por Walle (2009) para o reconhecimento das propriedades dos quadriláteros, podem ser tomadas como exemplo para o desenvolvimento do pensamento geométrico no Nível 1.

Prepare as fichas de trabalho contendo paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados. Em cada ficha de trabalho há três ou quatro exemplos daquela categoria de forma, como é mostrado a seguir.


Quadrados


Paralelogramos


Losangos


Retângulos

Organize os alunos para trabalharem em grupos de três (trios) ou de quatro (quartetos) para cada tipo de quadrilátero. A tarefa dos grupos é listar tantas propriedades quantas eles conseguirem identificar. Cada propriedade listada deve ser aplicável a todas as formas em sua ficha de trabalho. Os alunos vão precisar de uma ficha de registro simples

para: a) checar os ângulos retos; b) comparar os comprimentos dos lados; e c) desenhar linhas retas. Espelhos (para checar linhas de simetria) e papel de transparência (para checar congruências de ângulos e simetrias rotacionais) também são instrumentos úteis.

Encoraje os alunos a usar as palavras "pelo menos" ao descreverem a quantidade de alguma coisa. Por exemplo, "retângulos têm pelo menos duas linhas de simetria," enquanto quadrados – incluídos nos retângulos – possuem quatro.

Oriente os alunos a prepararem suas listas de propriedades sob esses cabeçalhos: Lados, Ângulos, Diagonais e Simetrias. Os grupos deverão compartilhar suas listas com toda a turma e, eventualmente (a partir das discussões), será desenvolvida uma lista coletiva da turma para cada forma.

Nível 2 - Dedução Informal

Neste nível, os alunos podem estabelecer relações entre as propriedades das figuras geométricas e também entre as figuras geométricas. Algumas definições mais elementares podem ser construídas neste nível.

As tarefas a seguir, propostas por Walle (2009) com o objetivo de elencar as propriedades dos quadriláteros, podem ser tomadas como exemplo para o desenvolvimento do pensamento geométrico no Nível 2, denominado Dedução Informal. Esta atividade deve ser feita em sequência à atividade citada anteriormente.

Uma vez que as listas de propriedades para os paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados (e possivelmente os "papagaios" (pipas) e os trapézios) tenham sido construídas coletivamente pela turma, exponha as listas em um painel ou reproduza-as para os alunos. Em pequenos grupos, a tarefa é criar "Listas mínimas de definição" ou LMDs para cada forma. Uma LMD é um subconjunto das propriedades de uma forma que pode ser usado para "defini-la" e é, ao mesmo tempo, "mínima" (suficiente e necessária). "Definir" aqui significa que qualquer forma que tenha todas as propriedades da LMD deve ser daquela forma.

Então, uma LMD para um quadrado vai garantir que você tenha um quadrado. "Mínima" significa que se qualquer propriedade simples for removida dessa lista, ela deixa de ser uma definição. Por exemplo, uma LMD para um quadrado é um quadrilátero com quatro lados congruentes e quatro ângulos retos. Os estudantes devem tentar descobrir pelo menos duas ou três LMDs para suas formas.

Uma lista proposta pode ser contestada como "não mínima" ou como "não definidora". Uma lista não é mínima se uma propriedade puder ser removida e a lista restante ainda definir a forma. Uma lista não é definidora se um contraexemplo – alguma outra forma diferente daquela que está sendo descrita – puder ser produzida usando apenas as propriedades na lista.

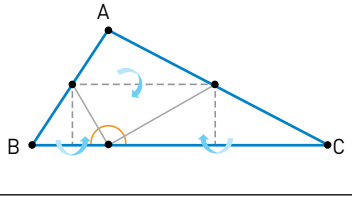
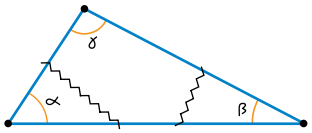
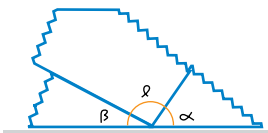
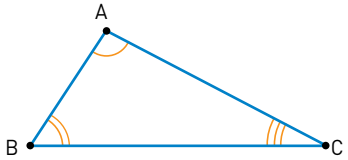
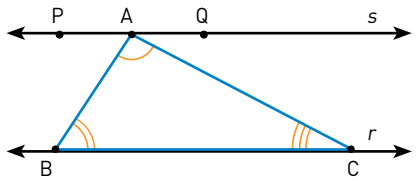
Nível 3 - Dedução Formal

Neste nível, os alunos devem analisar e compreender os processos dedutivos e as demonstrações com o processo axiomático associado. Não é esperado que os matriculados até o quinto ano consigam atingir.

Atente-se:

Durante as aulas de Geometria, assim como nos livros didáticos e em páginas da internet, muitas vezes são usados recursos que mostram a validade de algumas propriedades geométricas ou teoremas. Apesar de serem muito eficientes para torná-los claros para os alunos, elas não podem ser confundidas com as demonstrações, que requerem o uso de um rigor maior.

A seguir, na primeira coluna do quadro, há dois exemplos de como mostrar aos alunos a validade do Teorema da "Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo", sendo o primeiro usando apenas dobraduras e o segundo por meio de recortes. São muito válidos nos níveis 1 e 2 da Teoria de Van Hiele. Na segunda coluna, há uma das muitas demonstrações desse teorema, aplicável apenas nos níveis 3 e 4, segundo a Teoria de Van Hiele.

"Mostração"	Demonstração
 Ou   *Régua*	 Deseja-se demonstrar que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{o}$ Para iniciar a demonstração deve-se reconhecer que a reta *r*, que contém os pontos B e C, é paralela à reta *s* que contém o ponto A, e são colocados os pontos P e Q.  Como (i) $P\hat{A}B + \hat{A} + Q\hat{A}C = 180^{o}$, e (ii) $P\hat{A}B \equiv \hat{B}$, porque *r*//*s* e $\overline{AB}$ transversal a *r* e *s*; e (iii) $Q\hat{A}C \equiv \hat{C}$, porque *r*//*s* e $\overline{AC}$ transversal a *r* e *s* Substituindo (ii) e (iii) em (i), temos que, então, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{o}$.

Nível 4 – Rigor

Neste nível, o aluno consegue trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos e passa também a entender a Geometria de maneira abstrata. É um nível acessível, de maneira geral, apenas para alunos do Ensino Médio ou Ensino Superior.

Ampliando o vocabulário

Os axiomas são afirmações feitas e tomadas como verdades, uma vez que não podem ser demonstradas. Também são conhecidos como postulados. Não podem ser confundidos com definições, uma vez que essas são descrições.

A mais antiga sistematização dos conhecimentos geométricos foi feita por Euclides, no séc. IV A.C., em uma coleção de 13 livros chamada Elementos.

Nas escolas, estudamos com quase total predominância a Geometria plana, também conhecida por Geometria Euclidiana, por ela se fundamentar nos axiomas e teoremas descritos por Euclides.

1. Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar de uma única maneira qualquer reta finita continuamente em uma reta.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são congruentes.
5. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, se encontrarão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Diferentemente dos axiomas, os teoremas são afirmações que podem ser provadas a partir do uso lógico de outras afirmações, sejam elas axiomas ou outros teoremas. Por exemplo, a prova do teorema da soma interna dos triângulos usa, também, o quinto axioma de Euclides.

Essa organização do pensamento geométrico em cinco níveis é estruturante no Modelo de Van Hiele e deve ser usada para a organização do ensino. Para essa melhor organização é importante destacar suas quatro características.

A primeira dessas características, de que a teoria tem uma ordem fixa, implica o avanço ordenado e sequencial entre os níveis, isto é, um aluno só pode avançar para um determinado nível se ele consolidar as aprendizagens ou desenvolver as habilidades do nível anterior. Essa ordenação é necessária porque cada nível de pensamento é intrínseco ao nível posterior, ou seja, resulta em uma segunda característica que é a da adjacência.

Da mesma maneira, cada nível tem, inerente a ele, um conjunto de símbolos linguísticos e, por conseguinte, forma uma rede específica de relações entre esses símbolos, determinando assim a distinção entre seus níveis, sua terceira característica.

A quarta e última característica, a da separação, se configura por só ser possível o estabelecimento de uma rede de comunicação entre alunos que estejam no mesmo nível. Logo, para que a comunicação se efetive, quando pessoas estiverem em níveis diferentes, é necessário que aquela que estiver em um nível superior articule símbolos e habilidades do nível em que o outro está.

Características do modelo Van Hiele

1	ordem fixa
2	ordenação
3	símbolos linguísticos
4	separação

Os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental devem estar atentos até o Nível 2, que são mais intuitivos. De forma prática, essa teoria fala que os elementos geométricos são reconhecidos primeiro em sua totalidade. Em seguida, os elementos que compõem os objetos geométricos podem ser reconhecidos e, por último, as relações entre esses elementos podem ser estabelecidas.

Considerando os cinco níveis de pensamento e as características do modelo, o casal Van Hiele sugere que o ensino seja desenvolvido em cinco fases, para que os alunos consigam migrar de um dos níveis de pensamento para o seguinte. Segundo a teoria, "os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno" (SANTOS, 2015, p. 38). Essas preocupações são essenciais para que, independentemente da idade, o ensino da Geometria seja adequado e, assim, os alunos possam efetivamente aprender (CROWLEY, 1996).

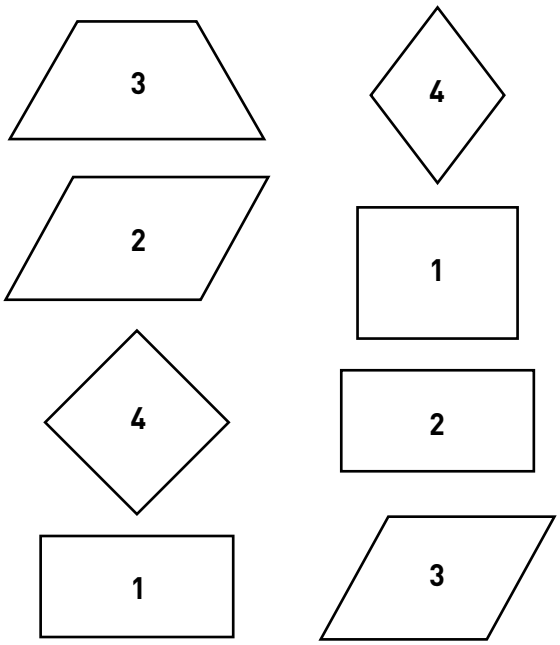
Com esse propósito, a Teoria de Van Hiele propõe que a organização didática tenha etapas, de maneira que, independentemente do nível em que os alunos estejam, após o cumprimento das cinco etapas, os alunos tenham migrado de um nível para outro. Essas etapas foram denominadas por Interrogação Informada, Orientação Dirigida, Explicação, Orientação Livre e Integração.

Na primeira fase (Interrogação Informada), as tarefas devem permitir que professores e alunos façam uma aproximação dialogada sobre os objetos de conhecimento, com o objetivo de iniciar a visualização dos elementos geométricos que serão tratados e para que as nomenclaturas adequadas sejam introduzidas. Trata-se de uma etapa introdutória, que deve ser caracterizada pela problematização que estimule o diálogo, onde as representações feitas pelos alunos devem ser usadas para apoiar a comunicação entre eles, ajudando o cumprimento dos objetivos de cada nível de pensamento. O uso de jogos e tarefas que levam à experimentação são pertinentes por propiciar a comunicação entre os alunos.

Uma prática comum entre os professores é a atribuição de denominações inadequadas aos elementos geométricos para depois usar a nomenclatura correta. Por exemplo, chamar um ângulo de "cantinho" ou a esfera de "bola". Essa é uma prática equivocada, pois os alunos, mesmo os menores, já são capazes de associar o nome correto ao elemento geométrico.

Analise este exemplo e perceba o contexto:

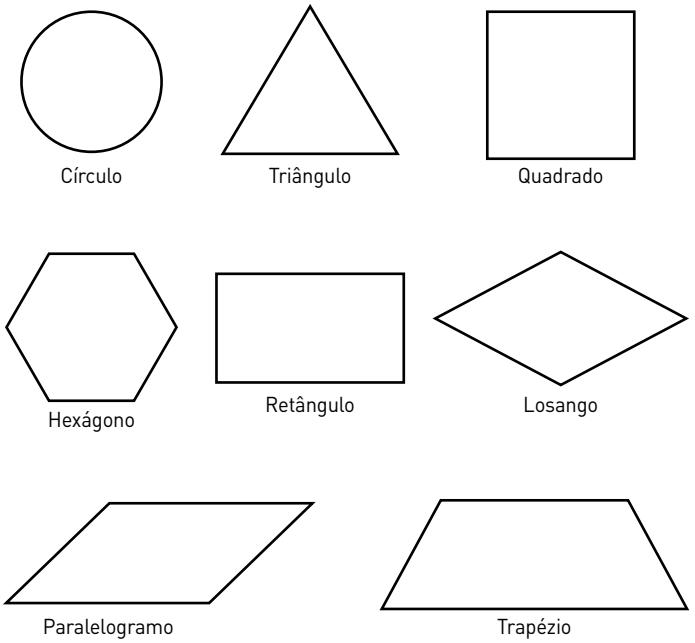
Organize as figuras ao lado em pares, usando os números para identificá-las. Em seguida, registre as semelhanças e diferenças entre as figuras de cada um dos pares.



Este é um exemplo de tarefa (que visa o desenvolvimento do pensamento do Nível 1) na qual os professores podem explorar essa fase inicial, Interrogação Informada, uma vez que inúmeras perguntas podem ser feitas e que será inevitável usar nomenclaturas adequadas durante a comunicação entre os alunos e entre o professor e o aluno.

Em seguida, a fase sugerida é a Orientação Dirigida. Nela, as problematizações, experimentações e investigações matemáticas devem ser as estratégias centrais presentes nas tarefas elaboradas pelos professores. Nesta fase, os trabalhos em duplas, trios ou grupos são bastante eficientes e a metodologia dessa etapa deve ser devidamente selecionada em função dos objetivos pedagógicos e dos recursos disponíveis, porém a elaboração das perguntas que orientarão as atividades dos alunos é essencial. Analise o exemplo a seguir e perceba o contexto:

Durante a visita que faremos pelos espaços da escola, observe em que locais você consegue visualizar cada uma das figuras ao lado. Verifique com seu colega se ele também consegue visualizar. Em seguida, registre pelo menos três lugares distintos.



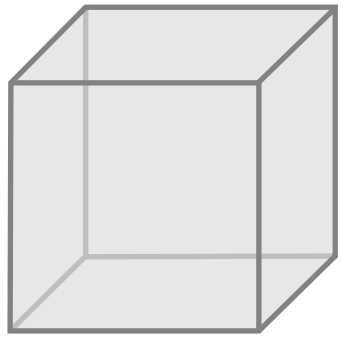
Este é um exemplo de tarefa (que visa o desenvolvimento do pensamento do Nível 0) na qual os professores podem explorar, por meio de investigação, a capacidade de visualização das crianças. Note que a observação de um aluno precisa ser validada por outro.

A fase da Explicação ocorre quando os conhecimentos construídos na fase anterior são sistematizados. A explicação não precisa necessariamente ser feita pelo professor, ela pode ser feita pelos próprios alunos em uma assembleia mediada pelo professor.

Para exemplificar esta fase, imagine os registros dos alunos feitos em duplas e apresentados para toda a turma, enquanto o professor mostra fotografias que ele foi coletando durante as observações feitas pelos alunos durante a visita.

Na fase da Orientação Livre, as tarefas mais complexas podem e devem ser exploradas quando novamente a metodologia de resolução de problemas, as experimentações e as investigações matemáticas são estratégias necessárias. Nesta fase, as tarefas mais adequadas são aquelas que podem ser resolvidas de diferentes formas e, até mesmo, aquelas que podem chegar a respostas diferentes a depender das decisões tomadas durante a sua resolução. As distintas soluções individuais devem ser estimuladas para a sua posterior validação em grupos ou pela turma. Ainda nesta etapa, as conjecturas devem ser levantadas e, por meio das discussões, devem ser refutadas ou confirmadas. Analise o próximo exemplo e perceba o contexto:

Quantas planificações diferentes pode ter um cubo?

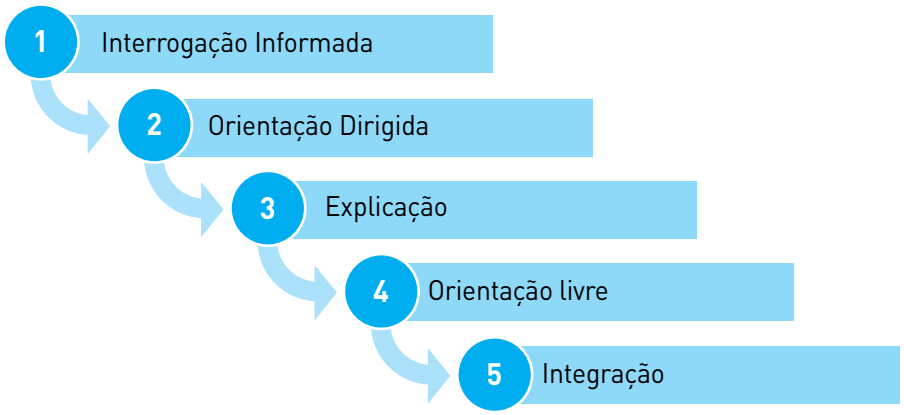


Esta tarefa é adequada para os alunos que estão desenvolvendo o terceiro nível de pensamento, uma vez que, apesar de ainda serem informais, as relações entre os elementos geométricos do cubo devem ser estabelecidas. Além disso, as relações entre a figura geométrica tridimensional (ou espacial) e sua planificação devem ser mantidas.

Lembre-se que não é possível fazer a planificação de um sólido geométrico, mas sim da figura geométrica espacial (ou tridimensional) que o representa. Além disso, as planificações não têm abas, certo?

A última fase (Integração) é o momento da metacognição e consolidação dos aprendizados ocorridos durante o processo. Essa sistematização pode ser feita por meio de definições, sínteses, mapas conceituais ou mapas mentais, produção de blogs ou sites etc. Nesta fase é importante que uma visão geral dos aprendizados seja feita para que ele possa migrar para o próximo nível de pensamento.

Fases da aprendizagem para migrar de um nível de pensamento para outro, segundo o modelo Van Hiele



Essas etapas, quando adequadamente construídas, especificando os objetivos pedagógicos, alocação dos recursos materiais e distribuídas as tarefas no tempo, se constituem como uma potente sequência didática. A avaliação, ao longo de todo o processo, não com o propósito final de atribuir notas, mas sim de orientar os caminhos a serem percorridos pelos alunos, é orientada pela clara e precisa especificação dos objetivos pedagógicos. Analise a situação seguinte e perceba o contexto.

Quando os alunos exploram o retângulo e o quadrado, de início reconhecem visualmente sua forma geral, depois reconhecem seus lados e ângulos, seguidos pelo reconhecimento do paralelismo e dos tamanhos dos lados e ângulos. Somente depois disso estabelecem as relações entre paralelismo, ângulos e tamanhos dos lados.

- No Nível 0, uma criança consegue diferenciar, pela forma geral, que um triângulo é diferente de um retângulo.
- No Nível 1, a criança passa a reconhecer a existência dos lados, tanto do triângulo quanto do retângulo, assim como também dos ângulos.
- No Nível 2, ela passa a perceber que o triângulo é uma figura que, se tem três lados, tem também três ângulos. Assim como o retângulo tem quatro deles.

Habilidades em Geometria

Em uma pesquisa acerca do ensino e aprendizagem da Geometria, Allan Hoffer (1981) afirma que o estudo de Geometria não deveria ser marcado apenas por noções, conceitos e procedimentos, nem ao menos pelo conhecimento de termos e relações geométricas, mas também pelo desenvolvimento de habilidades geométricas, entre as quais destaca cinco: visuais, verbais, de desenho, lógicas e aplicadas.

Para Hoffer, as habilidades *visuais* estão relacionadas à capacidade de ler desenhos e esquemas, discriminação de formas e visualização de propriedades nelas contidas.

As habilidades *verbais* envolvem a capacidade de expressar percepções, elaborar e discutir argumentos, justificativas, definições, descrever objetos geométricos e usar o vocabulário geométrico.

A respeito da habilidade verbal, Hoffer (1981, p.2) afirma:

> *Os alunos frequentemente expressam ideias de maneiras imprecisas que destoam das dos professores e textos. Um aluno poderia dizer, "Um círculo é uma linha redonda", ou "Um bissetor perpendicular atravessa o meio e fica em pé". Formulações precisas podem ser forçadas nos alunos antes que estejam prontos – antes que tenham eles mesmos a oportunidade de descrever conceitos e reconhecer a falta de precisão nas suas afirmações.*

As habilidades de *desenho* contemplam a capacidade de expressar ideias por meio de desenhos e diagramas, fazer construções com régua, compasso, esquadro, transferidor e programas gráficos de computador.

As habilidades *lógicas*, por sua vez, relacionam-se à capacidade de analisar argumentos, definições, reconhecer argumentos válidos e não válidos, dar contraexemplos, compreender e elaborar demonstrações.

Finalmente, as habilidades *aplicadas* envolvem a capacidade de observar a Geometria no mundo físico, apreciar e reconhecer a Geometria em diferentes áreas, tais como a arte.

Ao tratar das habilidades, Allan Hoffer destaca a pesquisa do casal Van Hiele:

> *É minha opinião, baseado em numerosas observações de sala de aula, discussões com outros professores e com alunos, e (infelizmente) minhas próprias experiências, que muitos cursos de Geometria para o secundário dão uma ênfase grande demais no desenvolvimento pelos alunos, da habilidade de escrever provas formais. Quando isto acontece, retira-se da classe um tempo precioso que poderia ser usado para fornecer aos alunos experiências em outras habilidades, possivelmente mais práticas, de natureza geométrica. Além disso, por começar com provas formais cedo demais num curso de Geometria, podemos não levar em conta aqueles alunos que ainda não alcançaram um nível suficientemente alto de desenvolvimento mental que os capacite a trabalhar adequadamente no nível formal. (1981, p.6)*

Dessa forma, o ensino da Geometria deveria proporcionar o avanço nos níveis como descrito anteriormente e o caminho para isso seria apresentar atividades para desenvolver as cinco habilidades sugeridas por Hoffer.

Para Machado, olhar para a Geometria dessa forma:

> *[...] é pensar em uma proposta que irá envolver os alunos em um ambiente desafiador, repleto de imagens e objetos, reproduções de obras de arte e, até mesmo, ilustrações dos livros de literatura infantil que permitam a apreciação da beleza e o encantamento de construir, representar e criar formas geométricas. (1990, p.48)*

Entendemos que ao escrever a respeito do ambiente desafiador, Machado se aproxime de Martins, Picosque e Guerra (2010) quando estas pesquisadoras discutem acerca da percepção estética e imaginação criadora, destacando que a percepção é a fusão entre pensamento e sentimento, que nos permite significar o mundo. Nas palavras dessas autoras:

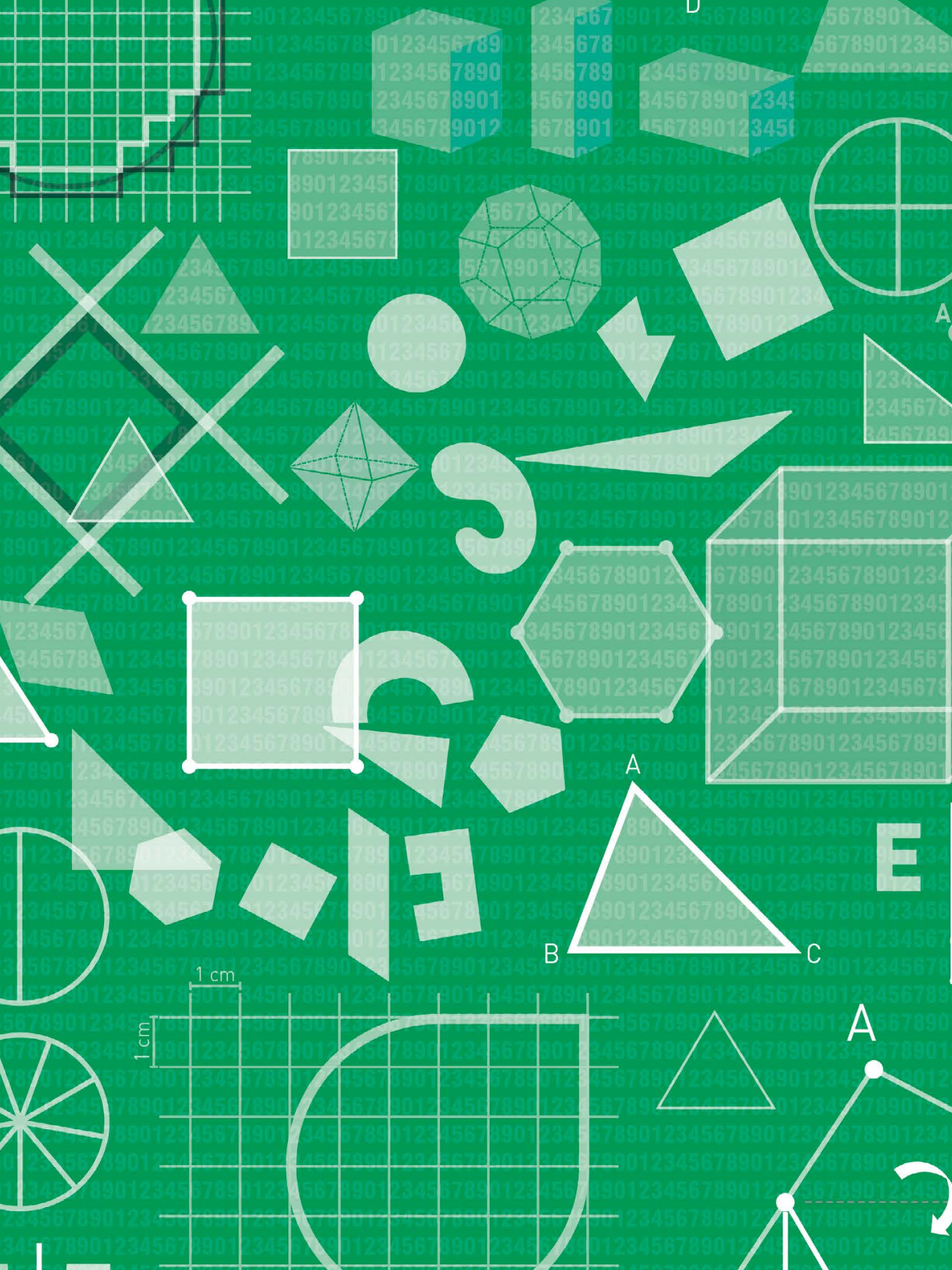
> *Se a escola permite apenas o olho da mente, mente! O olho da mente também é um olho sensível. Não podemos correr o risco de oferecer desafios que apenas trabalhem o sujeito cognitivo. É preciso criar situações em que o olhar e o ouvir, juntamente com o olfato, o tato e o paladar, possam ser filtros sensíveis no contato com o mundo. (2010, p.107)*

Como dito anteriormente, a análise da distribuição dos objetos de conhecimento geométrico, assim como de suas habilidades, presentes na BNCC (BRASIL,2017), permite constatar que essa teoria tem uma significativa aderência à Teoria de Van Hiele, assim como já havia ocorrido nos PCN (BRASIL, 1997).

> *Quanto à organização dos conteúdos, é possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-lo. É uma organização, dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da matemática, que desconsidera em parte possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados como um pré-requisito para o que vai sucedê-lo. (BRASIL, 1998, p.22)*

Essa aderência se caracteriza pela passagem paulatina e linear entre os níveis, indicando a relevância em reconhecer os elementos geométricos no ambiente em que se vive (necessariamente composto por sólidos geométricos), que em um exercício de abstração pode ser visualizado como uma composição dos sólidos geométricos padronizados e que estão presentes em seu cotidiano.

A etapa seguinte é a visualização das formas geométricas que representam esses sólidos. A partir dessa visualização de formas geométricas tridimensionais será possível a visualização (quando existente) das formas geométricas bidimensionais presentes na Geometria plana, para só depois reconhecer as figuras geométricas espaciais e, por fim, as figuras geométricas planas. Cabe destacar que as planificações devem ser feitas apenas nesta última fase, uma vez que a planificação é da forma geométrica e não do sólido.


D
A
A
B
C
E
1 cm
1 cm
A

2 Os objetos de conhecimento de Geometria e as habilidades especificadas na BNCC

É indiscutível que os professores que trabalham na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental tenham um amplo conhecimento da Geometria para que possam planejar melhor sua ação didática. Muitos dos conhecimentos a serem desenvolvidos em um determinado ano de escolarização dependem de outros, tratados em anos anteriores; da mesma forma, o conhecimento do ano corrente será essencial para que outros sejam construídos nos anos seguintes.

Este tipo de conhecimento foi inicialmente declarado por Shuman (1986) como sendo conhecimento curricular, dentre outros conhecimentos pedagógicos necessários ao professor para o pleno exercício de sua função. Muitos outros pesquisadores, como Ball, Hill e Bass (2005) e Carrillo et al. (2018), investigaram exaustivamente os conhecimentos, de maneira específica para aqueles professores que ensinam matemática, e confirmam a importância, também, desse tipo de conhecimento.

É evidente não ser possível abordar todos os conhecimentos da Geometria neste material, o que requer um empenho para que ele seja complementado ao longo do tempo.

Como critério para selecionar o que seria estritamente necessário abordar neste material, as habilidades especificadas na unidade temática de Geometria foram relacionadas e agrupadas em três grupos, como citado anteriormente:

a) Habilidades que tratam dos elementos geométricos e suas propriedades.

b) Habilidades que tratam da movimentação e localização.

c) Habilidades que tratam das transformações geométricas.

O propósito das próximas seções é analisar algumas tarefas que, apesar de poderem ser aplicadas a alunos, evidenciam parte dos conhecimentos necessários sobre os objetos de conhecimento centrais presentes nessas habilidades.

Alguns desses conhecimentos já foram abordados nos exemplos dados nas seções anteriores.

É muito importante que o conhecimento do professor seja mais amplo e profundo do que aquele que o aluno precisa saber. Somente assim ele conseguirá dar significado ao que ensina e evitar a memorização de regras.

2.1. Elementos geométricos e suas propriedades

Dentre as habilidades especificadas na unidade temática de Geometria descritas na BNCC (BRASIL 2017), 12 delas possuem objetos de conhecimento, cujos conceitos estão mais diretamente relacionados aos elementos geométricos e suas propriedades, os quais, para melhor organização, foram separados pelo ano de escolarização.

Para o **Primeiro ano**, são duas as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico.	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

A habilidade EF01MA13, apesar de aparentemente simples, inicia todo o processo e será ela que definirá os primeiros passos da trajetória de sua aprendizagem escolarizada na unidade temática da Geometria. Aprendizagem escolarizada porque não é pouca a aprendizagem que certamente as crianças já desenvolveram em sua experiência de vida e da forma mais diversa, e por vezes adversa.

Muitas são as questões que podem ser colocadas para que professores percebam a complexidade subjacente a esta primeira habilidade. Analise a situação na página seguinte e perceba o contexto.

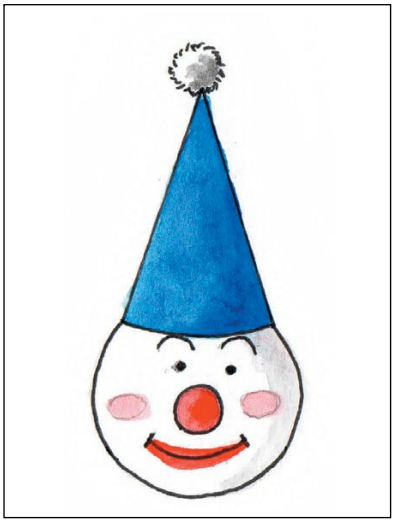
Para ajudar na percepção dessa complexidade, observe as quatro figuras geométricas a seguir:

1

2

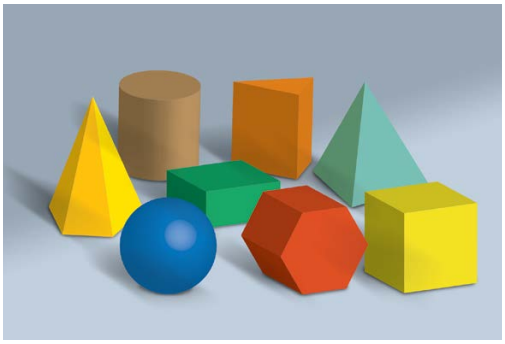
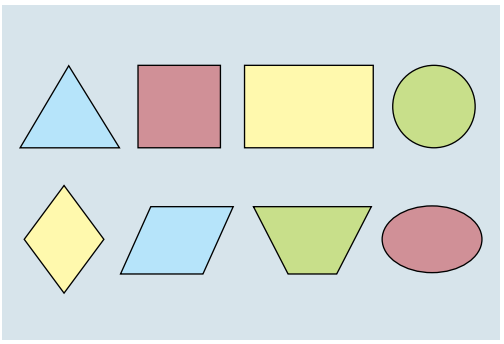
3

4

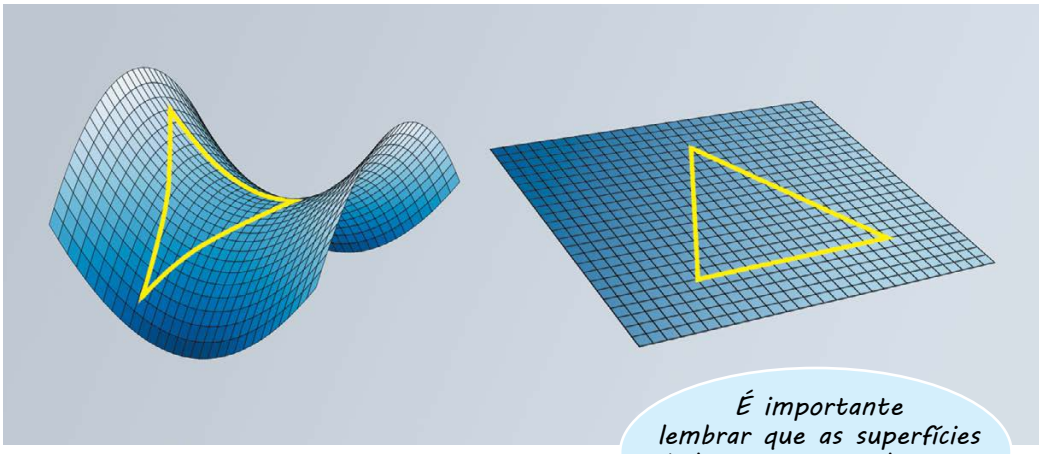


As respostas à pergunta "Quais figuras geométricas são comuns nas figuras (1) e (2)?" seriam as mesmas se no lugar das figuras (1) e (2) estivessem as figuras (3) e (4)?

Além disso, se os alunos tivessem em suas mãos, como recursos didáticos para comparação, um conjunto de sólidos geométricos ou um conjunto de figuras planas, como seriam suas respostas diante das perguntas usando as figuras (1) e (2)? E, depois, com as figuras (3) e (4) as respostas seriam as mesmas?

Sólidos geométricos	Figuras planas
	

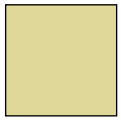
Essas duas perguntas buscam evidenciar o quanto o uso da terminologia adequada (assim como dos recursos usados) interfere nas respostas dos alunos. Busca evidenciar também a importância da distinção, desde a fase inicial, das figuras geométricas espaciais (tridimensionais) e das planas (bidimensionais).

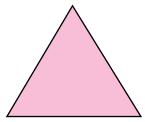


Enquanto a habilidade EF01MA13 coloca foco primeiro nos sólidos geométricos e suas respectivas formas geométricas espaciais, a habilidade EF01MA14 já coloca o foco nas figuras planas.

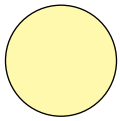
Para melhor perceber isso, na página seguinte estão descritas algumas nomenclaturas de figuras geométricas planas, por vezes adjetivadas em função das características que permitem a distinção de uma em relação às demais, mas sem a preocupação de fazer a inclusão de classes dessas figuras.

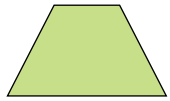
Figuras planas mais comuns


Quadrado


Triângulo

Retângulo

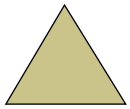

Círculo

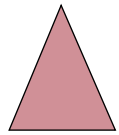

Trapézio

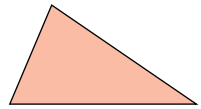
Paralelogramo

Sobre triângulos

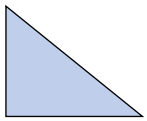
Classificados quanto aos lados

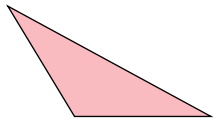

Equilátero

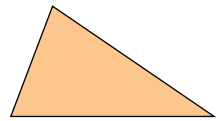

Isósceles


Escaleno

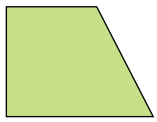
Classificados quanto aos ângulos internos

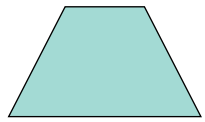

Retângulo

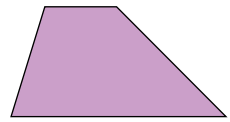

Obtusângulo


Acutângulo

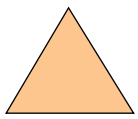
Sobre trapézios

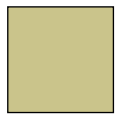

Retângulo

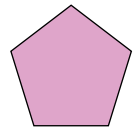

Isósceles

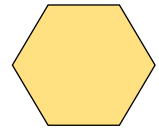

Escaleno

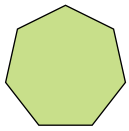
Sobre polígonos regulares

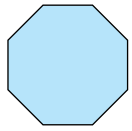

Triângulo

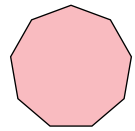

Quadrado

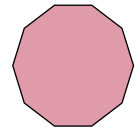

Pentágono


Hexágono


Heptágono

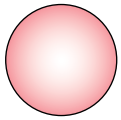

Octógono

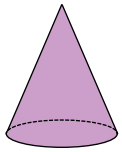

Eneágono

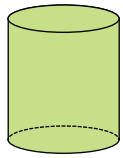

Decágono

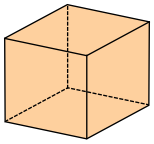
A mesma apresentação das nomenclaturas é feita, a seguir, para as figuras espaciais.

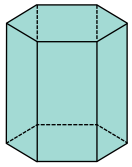
Figuras espaciais mais comuns

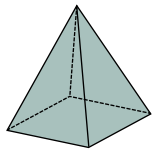

Esfera


Cone


Cilindro

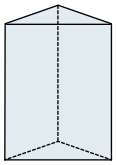

Cubo

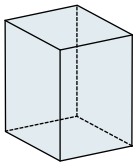

Prisma

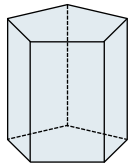

Pirâmide

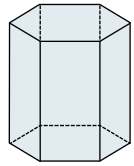
Sobre os prismas

Classificados em função da base

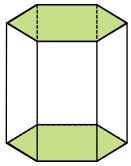

Base triangular

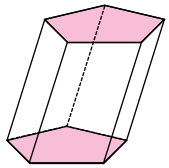

Base quadrada


Base pentagonal


Base hexagonal

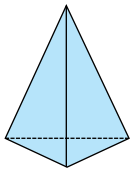
Classificadas quanto aos ângulos de suas arestas

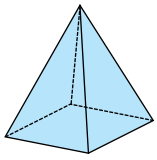

Prisma reto

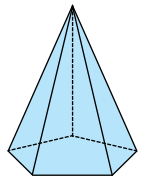

Prisma oblíquo

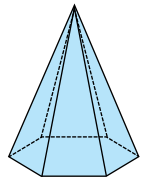
Sobre as pirâmides

Classificadas em função da base

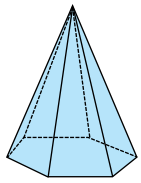

Base triangular

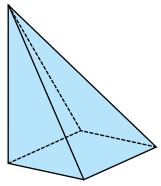

Base quadrada


Base pentagonal

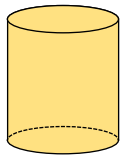

Base hexagonal

Classificadas quanto aos ângulos de suas arestas

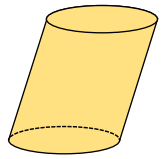

Pirâmide reta


Pirâmide oblíqua

Sobre os cilindros

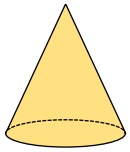


Cilindro reto

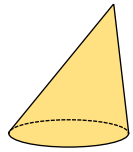


Cilindro oblíquo

Sobre os cones

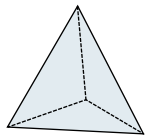


Cone reto

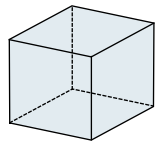


Cone obíquo

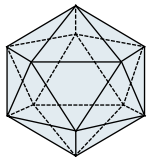
Sobre os poliedros regulares



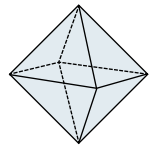
Tetraedro



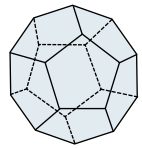
Cubo



Icosaedro

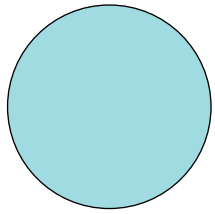


Octaedro

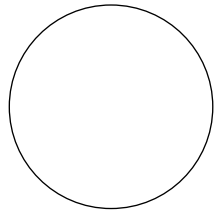


Dodecaedro

É importante esclarecer neste momento a diferenciação entre círculo e circunferência. Círculo é uma região delimitada por uma circunferência, ou seja, a circunferência é uma linha que pode ser entendida como sendo o contorno do círculo. Mas para todas as outras figuras planas essa distinção não é feita.



Círculo é uma região



Círcunferência
é uma linha

Para o **Segundo ano**, são duas as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características.	(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características.	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.

Walle (2009) destaca que quanto mais diversificado for o repertório de formas, obviamente, maior será o número de associações que os alunos poderão fazer com essas formas. Segundo ele, quando os alunos estão desenvolvendo as habilidades inerentes ao Nível 1 do pensamento geométrico proposto no modelo de Van Hiele,

> *podem notar aspectos que você não considera 'reais' atributos geométricos, tais como 'curvado' ou 'se parece com um foguete'. As crianças nesse nível também vão atribuir às formas algumas ideias que não são parte da forma, tais como 'aponta para cima' ou 'tem um lado igual à extremidade do tabuleiro'. (WALLE, 2009 p.445)*

Analise a situação seguinte e perceba o contexto.

Walle (2009, p. 446) sugere para os alunos a atividade denominada "Qual a minha forma?".

Faça um conjunto de formas bidimensionais em papel. Corte cerca de um terço das formas e cole-as, cada uma, dentro de uma folha de cartolina dobrada ao meio para fazer os folders "Forma Secreta". Em cada grupo, um aluno deve ser escolhido como líder e receber um folder "Forma Secreta".

Os outros devem encontrar a forma que se casa com a forma no folder. Para isso, eles devem fazer perguntas às quais o líder pode responder apenas com "sim" ou "não".

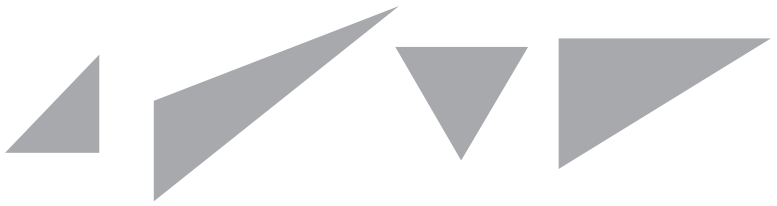
O grupo pode agrupar as formas enquanto fazem as questões para ajudar a eliminar e reduzir as possibilidades. Eles não podem apontar uma peça e perguntar: "A figura é esta?". Em vez disso, devem continuar a fazer perguntas que reduzam as escolhas a apenas uma forma. A peça final é confrontada com a peça no folder do líder.

Para aplicar essa tarefa com foco em figuras planas, Walle sugere o seguinte conjunto de formas:

Formas com contornos curvos

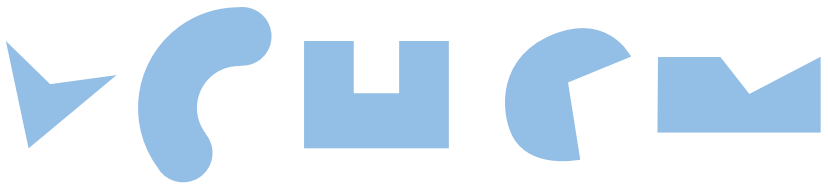
Lados opostos apontam na mesma direção: paralelogramos

Três lados: triângulos



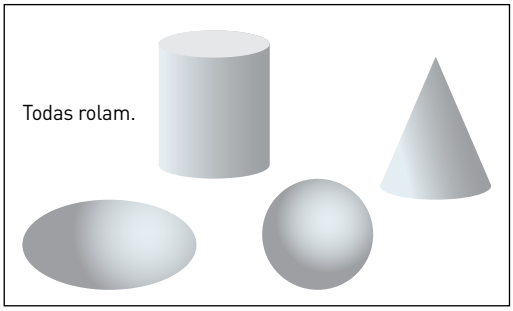
Formas com um canto "quadrado": ângulo reto

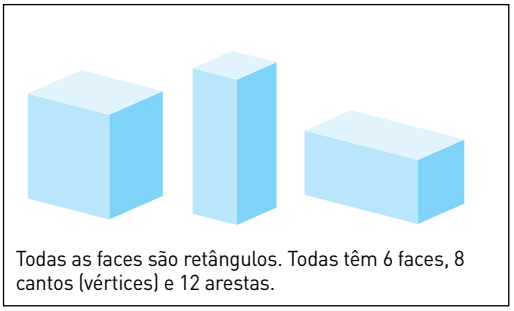
Estas são todas "dentadas" - côncavas



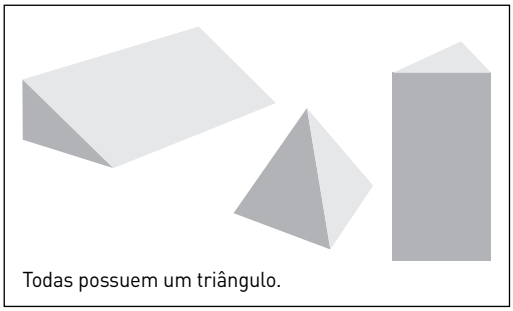
Fonte: Walle (2009, p. 446)

Para explorar figuras espaciais, Walle sugere esse outro conjunto de figuras:

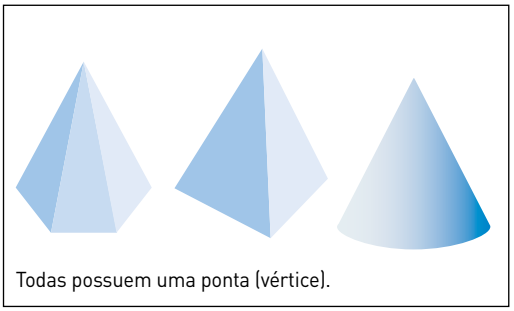




Todas as faces são retângulos. Todas têm 6 faces, 8 cantos (vértices) e 12 arestas.



Todas possuem um triângulo.



Todas possuem uma ponta (vértice).

Fonte: Walle (2009, p. 446)

Para o **Terceiro ano**, são quatro as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.	(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características.	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
Congruência de figuras geométricas planas.	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Neste conjunto de habilidades, além da manutenção do foco na comparação entre as formas geométricas, passam a ser valorizadas as propriedades intrínsecas de cada uma das formas geométricas e a planificação.

Esta é uma etapa importante para que se faça a distinção entre um sólido geométrico e sua forma geométrica correspondente, sendo que somente esta segunda permite a planificação.

Essa diferenciação é também importante para o discernimento entre os conceitos de capacidade e volume, que serão tratados com mais detalhe na próxima parte deste módulo.

Analise a próxima situação e perceba o contexto.

Massa e cartolina

Objetivo

Estabelecer diferenças entre representações distintas de um mesmo sólido geométrico.

Material necessário

Massa de modelar, bolinha de pingue-pongue ou de isopor e uma coleção de sólidos de cartolina contendo: um cubo, um paralelepípedo, um prisma de base triangular, um cone e um cilindro, para cada grupo de cinco alunos.

Desenvolvimento

Forme grupos de alunos e entregue a cada grupo o material acima descrito.

A seguir, cada equipe deverá reproduzir esses sólidos com a massa de modelar. Não há necessidade de que as dimensões sejam mantidas. Podem ser feitas miniaturas dos sólidos grandes.

Cada criança escolhe o sólido que deseja reproduzir. Enquanto trabalham, observe os procedimentos que empregam para moldar as figuras.

Terminado o trabalho, peça que contem como fizeram para moldar as superfícies arredondadas e as não arredondadas (achatamentos).

No decorrer da atividade, explore o fato de que alguns sólidos podem rolar, outros não. Pergunte por que o cubo não rola e a esfera sempre rola. Chame a atenção para os sólidos que podem rolar, ou não, dependendo da maneira pela qual os apoiamos. Pergunte de quantas maneiras podemos apoiar o cone para que ele não role. E o cilindro?

Peça também às crianças que passem a mão na superfície do cubo e na da esfera. Que diferenças percebem? Aproveite para verificar se as crianças têm o conceito de face, de vértice e de aresta, caso contrário, retome esses conceitos.

Em seguida, para cada par de sólidos - um de cartolina e o outro de massa - peça que apontem quais as semelhanças e diferenças existentes entre eles.

Peça aos alunos que tragam de casa um objeto qualquer cuja forma seja parecida com as que eles moldaram. Por exemplo: uma caixa, uma lata de refrigerante, contas esféricas, um dado, um chapéu de palhaço usado em festinhas etc.

Meta

Propiciar experiências com representações distintas de um mesmo sólido geométrico, a fim de reconhecer o atributo, forma comum a elas.

Comentários

As crianças, ao apontarem as diferenças e semelhanças existentes entre um sólido de cartolina e um sólido de massa, provavelmente destacarão o fato de um ser oco e o outro não. Na verdade, o sólido de cartolina representa apenas a superfície do sólido, enquanto o sólido de massa se aproxima mais da ideia de sólido geométrico, do qual os pontos interiores também fazem parte. No entanto, nesta fase o que importa é o reconhecimento de que ambos têm a mesma forma, ocupando, portanto, o mesmo espaço.

Misturando-se duas xícaras de farinha de trigo, uma xícara de sal, uma xícara de água, uma colher de sopa de óleo e um pacote de refrescos em pó dissolvido em água obtém-se uma massa colorida de modelar de ótima qualidade que, além do mais, não é prejudicial à saúde. (Fonte: SÃO PAULO - 1985a)

O desenvolvimento da habilidade (EF03MA14) que pretende descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones) relacionando-as com suas planificações não é uma tarefa simples, uma vez que exige do aluno a capacidade de visualizar, descrever e associar as propriedades das figuras. Inicialmente, é importante fazer a diferenciação entre prismas e pirâmides. Analise a próxima situação e perceba o contexto.

Prismas e pirâmides

Objetivo

Identificar as diferenças existentes entre prismas e pirâmides.

Material necessário

Um conjunto de sólidos em cartolina ou em massa contendo: um cubo, um paralelepípedo, um prisma de base triangular, um prisma de base pentagonal, um prisma de base hexagonal, uma pirâmide de base triangular, uma pirâmide de base quadrada, uma pirâmide de base pentagonal e uma pirâmide de base hexagonal.

Desenvolvimento

Situação 1

Separe a classe em grupos e dê a cada um deles uma coleção com os sólidos descritos. Peça que arrumem essa coleção em dois grupos, de maneira que cada grupo forme uma família segundo o que eles têm de parecido.

Percorra os grupos analisando as soluções e peça que cada um justifique sua arrumação. Escolha os grupos que separaram os prismas das pirâmides e peça aos demais que façam o mesmo.

Situação 2

Peça que descrevam por que as pirâmides formam uma família e por que todos os prismas formam outra família de sólidos. Caso haja condições e oportunidade, aproveite este momento para introduzir a terminologia específica: pirâmide e prisma.

Meta

Propiciar experiências para introduzir a diferença entre prismas e pirâmides.

Comentários

Dentre os poliedros (sólidos geométricos cujas faces são polígonos) existem duas classes importantes que são os prismas e as pirâmides.

Num prisma, duas de suas faces denominadas bases são paralelas e congruentes (de mesma forma e tamanho) e as demais, denominadas faces laterais, são paralelogramos. Se o prisma for reto, isto é, se as arestas laterais forem perpendiculares às bases, então as faces laterais são retangulares. Se, além de serem retos, as bases forem polígonos regulares (os lados e os ângulos com medidas iguais), então o prisma é chamado prisma regular. Nesta atividade são apresentados apenas prismas regulares.

Numa pirâmide, uma das faces, denominada base, é um polígono qualquer e as demais, denominadas faces laterais, são sempre triangulares. As pirâmides regulares são as que são retas e têm como base um polígono regular; neste caso, as faces laterais são triângulos isósceles (possuem dois lados de mesma medida). Nesta atividade são apresentadas apenas pirâmides regulares.

Nas próximas atividades de Geometria, as diferenças entre prismas e pirâmides serão mais evidenciadas, de maneira a propiciar a formação dos dois conceitos. Convém, entretanto, durante esta atividade, desfazer possíveis confusões entre o prisma de base triangular e uma pirâmide qualquer. (Fonte: SÃO PAULO - 1985a)

Vencida esta etapa, na qual se faz a diferenciação entre prismas e pirâmides, é o momento de diferenciação entre prismas e entre pirâmides. Inicialmente, o trabalho pode ser proposto para a diferenciação entre os prismas. Analise estas situações e perceba o contexto:

Os prismas

Objetivo

Identificar as bases de um prisma.

Material necessário

Uma coleção de prismas de cartolina ou massa contendo um de base triangular, um de base pentagonal e um de base hexagonal, um cubo e um paralelepípedo por grupo de cinco alunos.

Desenvolvimento

Situação 1

Entregue para cada grupo de alunos a coleção de sólidos descrita, com exceção do cubo e do paralelepípedo.

Dê um tempo para que as crianças possam manipular esse material livremente e, a seguir, peça que observem todas as suas faces, escrevendo em cada uma delas o número de arestas que ela tem.

A seguir peça que preencham a seguinte tabela:

	Número de faces que têm 4 arestas	Número de faces que não têm 4 arestas
Prisma A		
Prisma B		
Prisma C		

Pergunte o que elas podem afirmar com os dados obtidos.

Uma vez verificado que todos os prismas possuem faces com quatro arestas, proponha que apoiem, cada um deles, sobre a carteira, de modo que cada uma dessas faces fique com apenas uma das suas arestas encostada na carteira.

Feito isto, as crianças fazem uma cruz bem grande na face de apoio. Pergunte se é possível apoiar o prisma sobre uma outra face, de modo que todas as faces, com quatro arestas, fiquem novamente com apenas uma das suas arestas encostada na carteira. Elas deverão concluir que sim e fazer urna cruz, também, nessa outra face. Aproveite esse momento para chamar essas duas faces de bases do prisma.

Situação 2

O mesmo trabalho será feito agora com o cubo e o paralelepípedo. Neste caso, ao preencher a tabela, os alunos observarão que todas as faces desses prismas têm quatro arestas. Assim sendo, qualquer que seja a forma de apoiá-los sobre a carteira, quatro faces com quatro arestas estarão sempre com apenas uma aresta encostada na carteira. Portanto, duas faces opostas quaisquer podem ser consideradas como bases.

Meta

Propiciar condições para que os alunos identifiquem as bases de um prisma.

(Fonte: SÃO PAULO - 1985a)

Uma tarefa análoga pode ser feita para a diferenciação entre as pirâmides. Analise estas situações e perceba o contexto.

As pirâmides

Objetivo

Identificar a base de uma pirâmide.

Material necessário

Uma coleção de pirâmides em cartolina ou massa, sendo uma de base triangular, uma de base quadrangular, uma de base pentagonal e uma de base hexagonal, por grupo de cinco alunos.

Desenvolvimento

Situação 1

Entregue a cada grupo de alunos a coleção de sólidos descrita, com exceção da pirâmide de base triangular.

Dê algum tempo para que as crianças manipulem esse material livremente e, a seguir, peça que observem todas as faces de cada uma das pirâmides escrevendo, em cada uma delas, o número de arestas que ela tem.

A seguir, peça que preencham a seguinte tabela:

	Número de faces que têm 3 arestas	Número de faces que não têm 3 arestas
Pirâmide A		
Pirâmide B		
Pirâmide C		

Pergunte o que os alunos podem afirmar com os dados obtidos.

Uma vez verificado que todas as pirâmides possuem faces com três arestas, proponha que apoiem cada uma delas sobre a carteira, de modo que cada uma dessas faces fique com apenas uma aresta encostada na carteira.

Feito isso, as crianças fazem uma cruz bem grande na face de apoio. Pergunte se é possível apoiar a pirâmide sobre uma outra face, de maneira que as faces de três arestas tenham apenas uma aresta encostada na carteira. Uma vez concluído que isso não é possível, aproveite o momento para chamar a face de apoio de base da pirâmide.

Situação 2

O mesmo trabalho será feito agora com um tetraedro regular, evidentemente sem empregar essa nomenclatura.

Os alunos deverão concluir que todas as faces podem ser assinaladas com uma cruz pois, qualquer que seja a face de apoio, as demais terão três arestas das quais apenas uma delas estará encostada na carteira.

Meta

Propiciar condições para que os alunos identifiquem a base de uma pirâmide.

Comentários

O tetraedro regular é uma pirâmide em que todas as faces são triângulos equiláteros (lados de mesma medida). (Fonte: SÃO PAULO - 1985a).

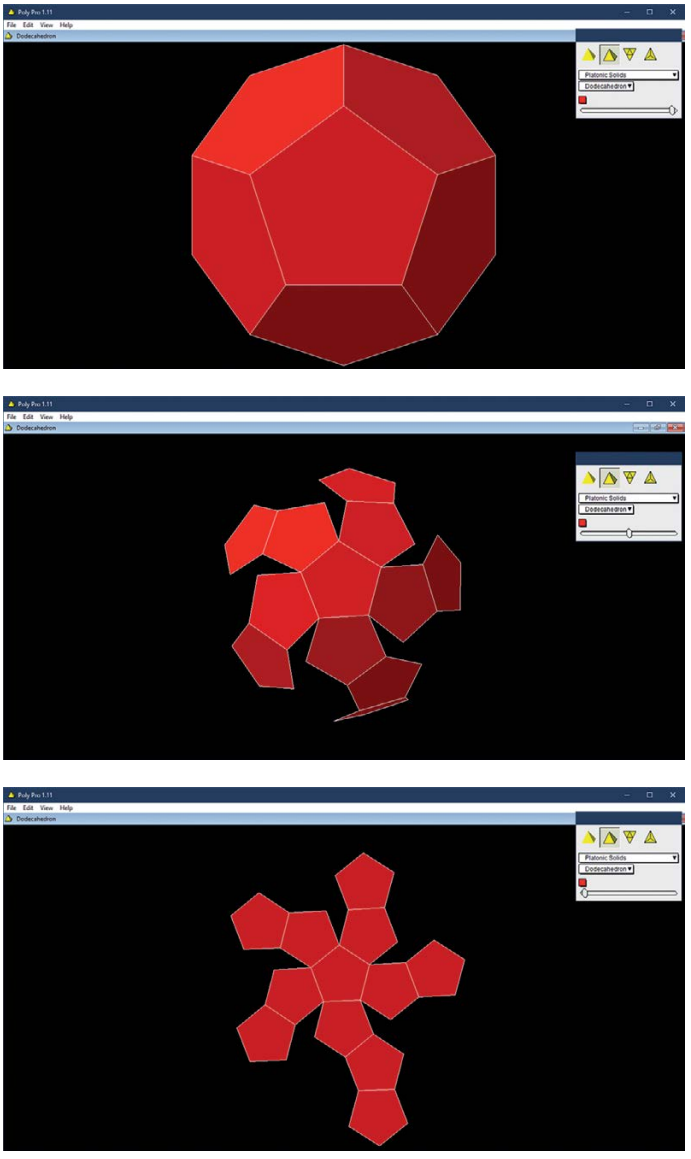
Para o **Quarto ano**, são duas as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.	(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares.	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.

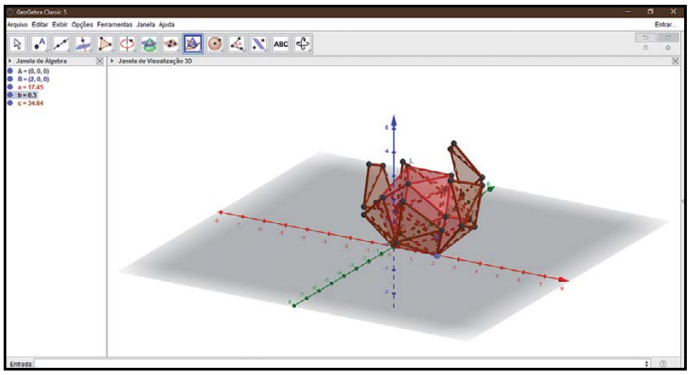
Como pode ser observado, no Quarto ano, as planificações e o uso de programas computacionais ganham relevância.

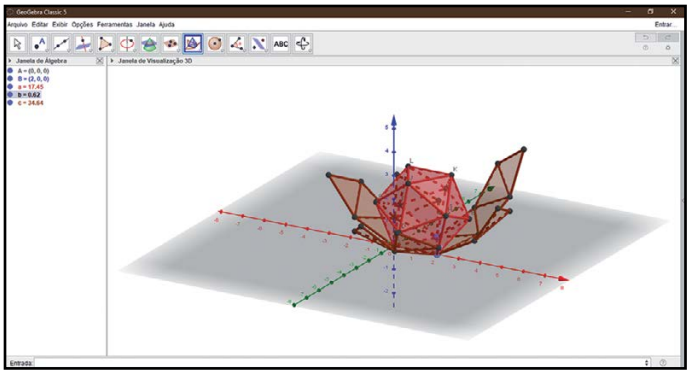
No link http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php você poderá baixar gratuitamente um aplicativo que permite visualizar de uma forma dinâmica a planificação de diversos poliedros. Outra ferramenta digital que você pode explorar é o Geogebra. Há inúmeros vídeos que orientam como usá-la. Além disso, há uma comunidade virtual com exemplos de muitos aplicativos, todos no conceito de Recursos Educacionais Abertos (REA). O uso desses recursos é importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico e também do pensamento computacional.

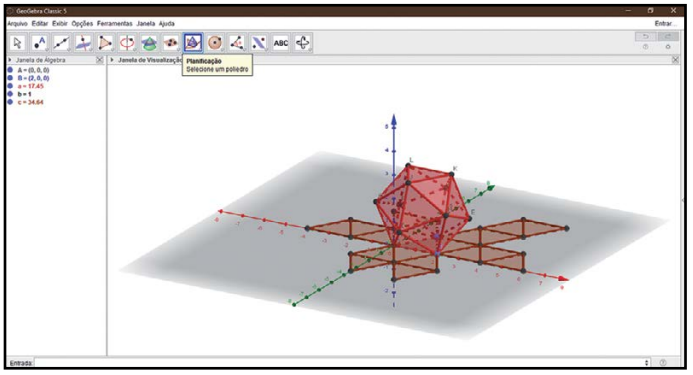
Imagens do aplicativo Poly Pro



Imagens do aplicativo Geogebra







Para o **Quinto ano**, são duas as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Ao analisar essas 12 habilidades, é possível constatar quantos são os objetos de conhecimento que não estão explícitos no decorrer dos anos de escolarização. Isso exige que o coletivo de professores tenha um bom plano para o Ensino Fundamental (para os planos de ensino de cada um dos anos de escolarização), para que, ao final dos cinco primeiros anos de escolarização, os alunos tenham efetivamente a oportunidade de construírem os conhecimentos geométricos. Tal como afirma a professora Adair Mendes Nacarato[1].

> *Deixa-se muito a cargo do professor o trabalho a ser realizado com Geometria, sem que a ele sejam dados os subsídios necessários. Como professora do curso de Pedagogia – o qual forma professores para esse nível de ensino –, posso afirmar que a disciplina de Fundamentos e Metodologia do Ensino de Matemática, na maioria das instituições, como já apontado por pesquisas, é de apenas um semestre no curso e raramente trabalha com o eixo da geometria. Daí a necessidade de que um documento curricular seja o mais claro possível ao professor e mostre como ocorre a progressão do processo de formação desse tipo de pensamento. Os objetivos para a parte de Geometria do 5º ano não evidenciam os avanços que os alunos precisariam ter em relação aos anos anteriores. Há uma repetição ou redução dos objetivos propostos anteriormente.*

Dentre esses objetos de conhecimento, não é possível o aluno reconhecer os elementos geométricos como ângulo, paralelismo, conceito de polígonos, dentre muito outros.

Mais uma vez, as tarefas a seguir, apesar de destinadas para aplicação aos alunos, não devem ser vistas como uma sequência didática. Elas foram selecionadas para destacar alguns elementos geométricos, que necessariamente devem ser abordados nos Anos Iniciais e que estão presentes de forma subjacente às habilidades especificadas na BNCC (BRASIL, 2018).

1 - Excerto do texto disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/Adair_Mendes_Nacarato.pdf. (p. 9)

Certamente, como os conceitos elencados a seguir são considerados centrais, outros deverão ser pesquisados, uma vez que não são menos importantes diante da totalidade do conhecimento necessário para o ensino da Geometria.

O polígono é um desses primeiros conceitos, pois dele derivam muitas classificações que agrupam as infinitas formas possíveis. Essas classificações estruturam boa parte do currículo escolar e elas apenas podem ser feitas a partir de outros conhecimentos geométricos. Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

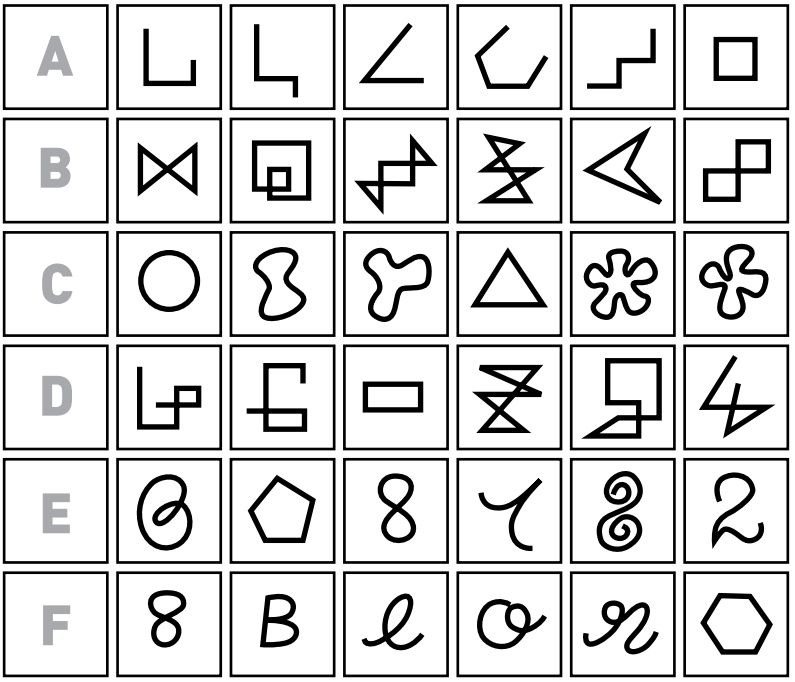
Os polígonos

Objetivo

Reconhecer dentre as figuras planas aquelas que são polígonos.

Material necessário

Uma folha para cada grupo de alunos, contendo o seguinte quadro composto por imagens.



Desenvolvimento

1ª Parte

Divida a classe em grupos e entregue a folha com o quadro anterior para cada grupo. Peça que observem bem as figuras de cada fileira horizontal e marquem o que é diferente das demais, fazendo uma justificava por escrito de cada escolha.

Dê um tempo para a realização da tarefa e, a seguir, deixe que cada grupo exponha suas observações. Eles deverão concluir que:

- A figura destacada na fileira A é fechada (não aberta).
- A figura destacada na fileira B é aquela cujos lados não se cruzam (ou é simples).
- A figura destacada na fileira C tem lados retos.
- Na fileira D: é fechada e os lados não se cruzam.
- Na fileira E: é fechada e tem lados retos.
- Na fileira F: os lados são retos e não se cruzam.

Comente, então, que as figuras que têm essas características (fechadas, lados retos e que não se cruzam) recebem o nome de polígonos.

2ª Parte

Peça à classe que enumere objetos em que as crianças identificam essas formas.

Dentre elas, possivelmente serão lembrados os contornos das faces de sólidos geométricos com os quais trabalharam. Solicite, então, que observem o conjunto de sólidos e verifiquem se todas as faces têm forma de polígono. Elas concluirão que as únicas exceções são as das faces opostas dos cilindros e a base do cone, que são círculos.

3ª Parte

Solicite a cada grupo que desenhe numa folha em branco uma diversificada coleção de polígonos – os sólidos geométricos podem ser usados para obter os contornos desejados.

Solicite, então, para os grupos que façam uma arrumação nessa coleção de figuras, agrupando-as de acordo com o critério que desejarem.

Realizada a tarefa, deixe que cada grupo apresente sua arrumação. Dentre eles, provavelmente aparecerá a classificação pelo número de lados dos polígonos.

Coloque questões, como:

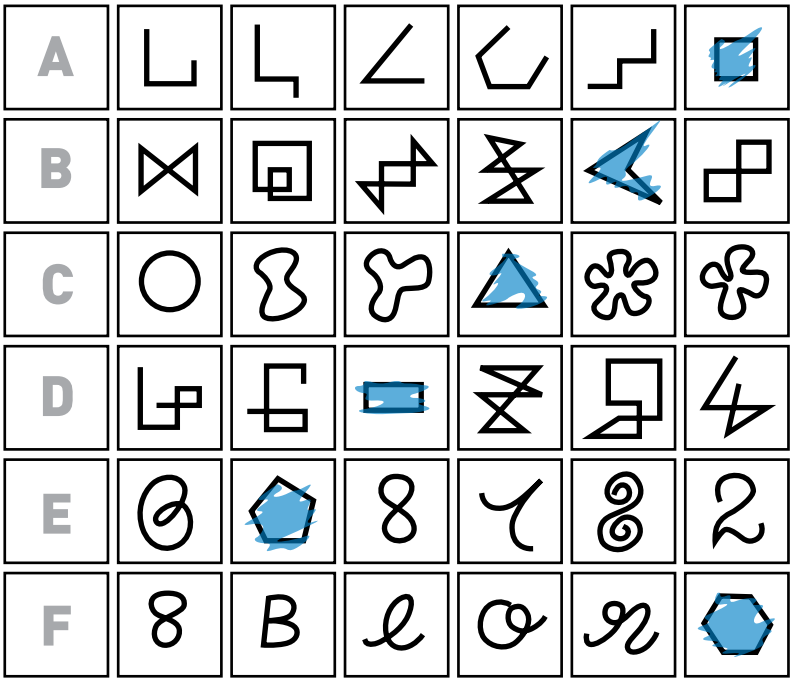
- É possível desenhar um polígono com menos de três lados? Por quê?
- Alguém sabe o nome especial que recebem os polígonos de 3 lados? E os de 4?

Meta

Propiciar condições para que o aluno identifique, dentre as figuras planas, aquelas que são polígonos.

Comentários

A seguir está um exemplo de resposta.



Fonte: SÃO PAULO (1985b)

A - é fechada

B - os lados nao se cruzam

C - lados retos

D - é fechado e os lados não se cruzam

E - é fechado e tem lados retos

F - lados retos que não se cruzam

As noções de ângulo são essenciais para a classificação dos polígonos. Inicialmente, basta o desenvolvimento da noção de ângulo reto, quando inevitavelmente podem ser construídas as noções de ângulos maiores ou menores que o ângulo reto, sendo que suas denominações de ângulo obtuso e agudo, respectivamente, não são essenciais nesse momento. Como você poderá perceber, a tarefa apresentada a seguir pode ter grande conexão com o conceito de números racionais. Analise as situações seguintes e perceba o contexto.

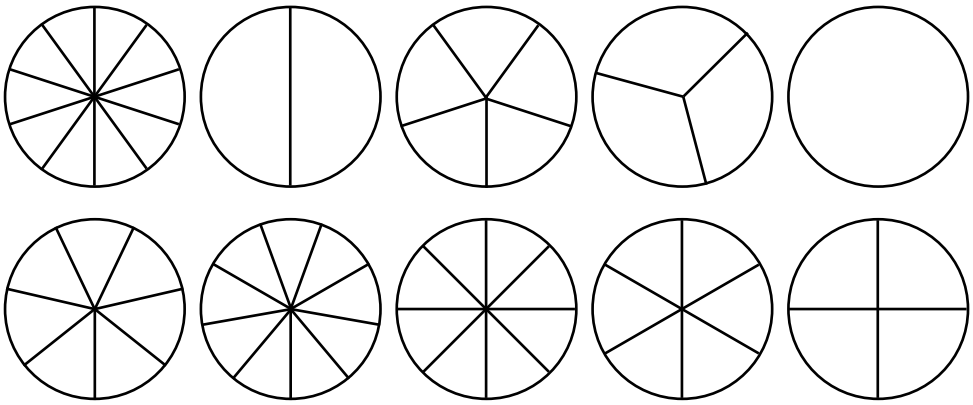
Descobrindo o ângulo reto

Objetivo

Identificar ângulos retos.

Material necessário

Uma folha para cada aluno contendo os discos a seguir.



Desenvolvimento

1ª Parte

Solicite a cada criança que desenhe três círculos de tamanhos diferentes em uma folha de papel.

Após recortarem os discos obtidos, elas serão solicitadas a dividir cada um deles em quatro partes iguais, por meio de dobraduras. Verifique como elas procedem para fazer essa divisão (provavelmente dobrarão ao meio duas vezes consecutivas). Solicite então que observem o "canto reto" nas três dobraduras. Qual é a conclusão?

Utilizando qualquer disco dobrado em quatro partes, as crianças serão convidadas a descobrir "cantos" nos objetos (mesas, cadernos etc.) que tenham esse mesmo tamanho. Elas deverão concluir que esse tipo de canto é muito comum nos objetos que lhes são familiares.

A seguir, elas desenham em uma folha os cantos retos das três dobraduras e passam a analisar esses desenhos: embora o comprimento dos lados varie, o canto formado é igual. A esse canto chamamos ângulo reto.

2ª Parte

As crianças trabalham com a folha anterior, que contém os círculos divididos. A proposta é observar se, nos discos divididos em um número de partes que não quatro, os cantos formados são ângulos retos. Além disso, elas podem chegar a concluir que:

- Quando o disco é dividido em menos de quatro partes, os cantos formados são maiores que o ângulo reto.
- Quando o disco é dividido em mais de quatro partes, os cantos formados são menores que o ângulo reto.

Finalmente, solicite às crianças que dobrem uma folha de papel duas vezes e desdobrem a seguir. Quantos cantos são formados? Eles são retos? Qual é a condição que deve ser obedecida na dobradura para obter ângulos retos?

Meta

Introduzir intuitivamente o conceito de ângulo reto.

Comentários

Esse conceito é bastante importante para a classificação dos quadriláteros em "retângulos" e "não-retângulos", mas sendo um conceito bastante complexo para os alunos desse nível, optamos por uma apresentação apenas intuitiva.

(Fonte: SÃO PAULO - 1985b)

Outra noção essencial é a de paralelismo. Dentre inúmeras aplicações, o seu conhecimento também é determinante para a classificação de polígonos. Analise estas situações e perceba o contexto.

Paralelas

Objetivo

Construir feixes de retas paralelas.

Material necessário

Para cada grupo: réguas, três círculos de tamanhos diferentes e uma folha com o quadro ao lado.

Desenvolvimento

Divida a classe em grupos de três alunos e entregue a cada grupo três círculos de tamanhos diferentes.

Diga às crianças que elas irão dobrar cada círculo ao meio e, a seguir, uni-los como duas metades, obtendo um semicírculo. Depois, elas dobram novamente ao meio e passam um traço colorido sobre essa dobra. Para tanto, podem usar as réguas colocadas à sua disposição.

Fig. a

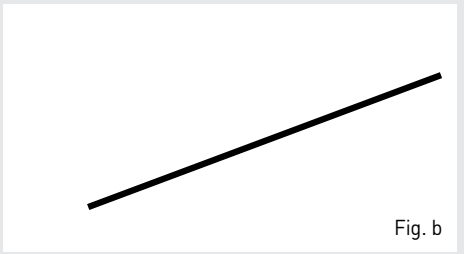
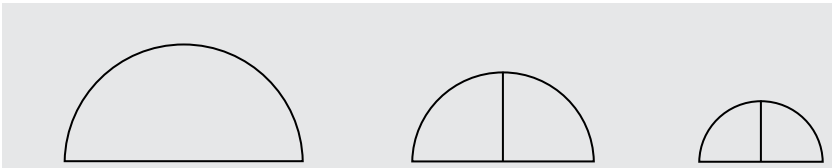


Fig. b

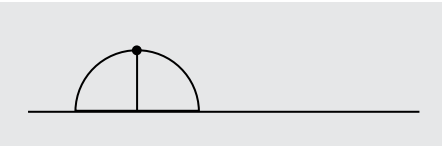
Fig. c



Distribua para cada grupo de três alunos uma folha com as retas. Cada um deles trabalhará, respectivamente, com a figura a, b ou c. Diga que eles serão orientados na construção de um traçado que vai ser feito nessa folha e com a ajuda de semicírculos.

Para tanto, eles devem:

a) Apoiar o semicírculo maior na figura (a) (b ou c) e marcar, com um ponto, a extremidade superior do traço colorido:



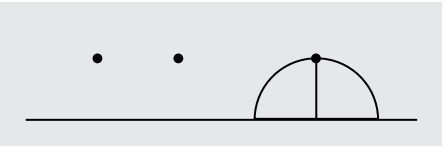
b) Repetir essa operação fazendo o semicírculo deslizar sobre uma figura (b ou c).

c) Unir os pontos marcados com auxílio da régua.

d) Repetir todos os passos anteriores, usando o semicírculo médio.

e) Repetir todos os passos anteriores, usando o semicírculo menor.

Solicite às crianças que observem o desenho obtido e pergunte:



- O que ele faz lembrar?
- Essas retas estão se cruzando?
- E se as prolongássemos para fora do papel, o que aconteceria? Por quê?
- Conte então que essas retas que não se cruzam são chamadas "retas paralelas".

Feito isso, cada um desses conjuntos de retas será colorido com uma determinada cor. As três crianças serão orientadas então a fazer sobreposições. Elas poderão perceber, dependendo da superposição, que é possível:

- Fazer coincidir como retas dos três conjuntos.
- Formar mosaicos de quadriláteros, usando dois quadros.
- Formar mosaicos de retângulos, usando novamente dois quadros.

Finalmente, você mostra na classe uma folha de papel em que foram feitos dois vincos paralelos. Solicite que as crianças realizem, através de uma dobradura, vincos paralelos. Em seguida, analise e comente os procedimentos.

Meta

Propriedades propícias para que a criança perceba propriedades de um feixe de retas paralelas.

Comentários

Para ampliar a exploração do conceito de paralelismo, faça com que as crianças identifiquem sua presença no mundo físico que as cerca, procurando "paralelas" na sala de aula, nos móveis, nos objetos escolares e tentando recordar outros exemplos de "retas paralelas" em locais fora da escola. (Fonte: SÃO PAULO - 1985b)

Minimamente, com as noções de ângulo e paralelismo associadas à capacidade de comparar o tamanho dos lados das figuras, é possível realizar algumas classificações de polígonos. A tarefa a seguir permite a classificação de quadriláteros. Analise as próximas situações.

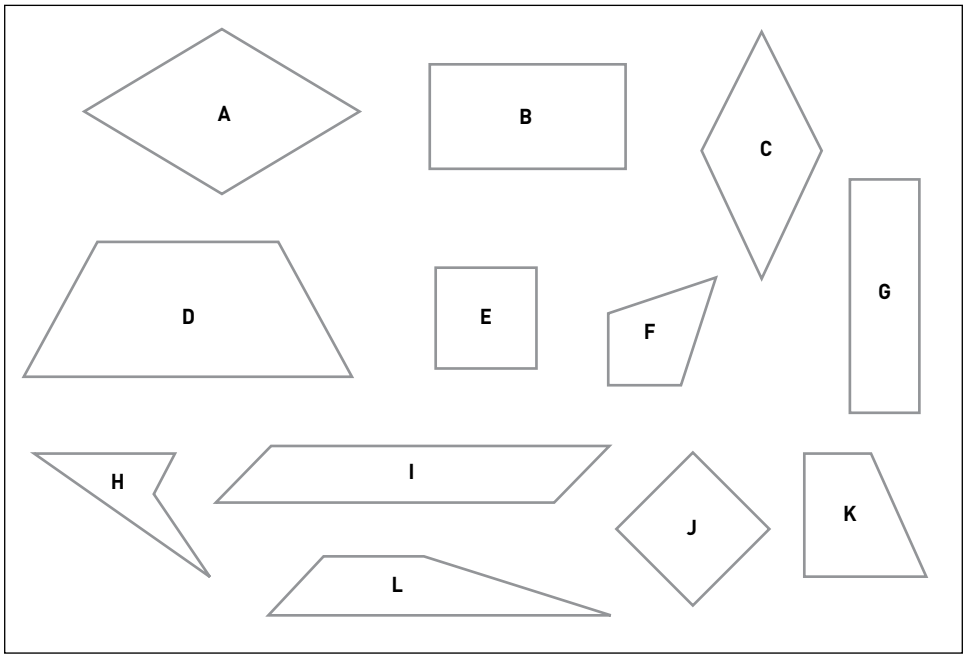
Separando quadriláteros

Objetivo

Identificar, entre os quadriláteros, aqueles que são retangulares e / ou losangos.

Material necessário

Uma folha contendo os quadriláteros a seguir para cada grupo de alunos.



Desenvolvimento

Divida a classe em grupos e entregue uma folha acima para cada grupo. Diga que nela estão representados diversos quadriláteros.

1ª Parte

Solicite que observem cada um dos quadriláteros e pintem de vermelho aqueles que têm quatro ângulos retos, anotando, ao lado dos demais, o número de ângulos retos que possuem. Para tanto, podem utilizar as dobraduras feitas na tarefa "Descobrindo o ângulo reto".

Realizada a tarefa, as crianças expõem suas respostas e devem concluir que:

- Os quadriláteros presentes na folha têm 0, 1, 2 ou 4 ângulos retos.
- Há quatro quadriláteros que têm os quatro ângulos retos e que foram pintados de vermelho.

Comente que esses quadriláteros que têm quatro ângulos retos são chamados de **retângulos**.

2ª Parte

A proposta agora é: pintar de azul o contorno dos quadriláteros que têm os quatro lados do mesmo tamanho. Em casos que possam suscitar dúvidas, os alunos podem medir os lados, usando barbantes ou qualquer outro instrumento de medida que acharem conveniente.

Confira a tarefa e conte a eles que esses quadriláteros, cujos lados têm a mesma medida, são denominados **losangos**.

Solicite às crianças que recortem como figuras da folha e as disponham num quadro, como mostra a figura abaixo. Esse quadro pode ser confeccionado pelos próprios grupos numa folha de papel sulfite.

Retângulos	**Não retângulos**

A seguir, uma nova divisão é feita nesse quadro e as figuras podem ser agrupadas de modo a satisfazer essa nova disposição:

	Retângulos	Não retângulos
Losangos	1	2
Não losangos	3	4

Discuta com as crianças as propriedades das figuras que ficaram em cada uma dessas quatro regiões. Diga que as figuras da região 1 são chamadas **quadrados**. Explore questões como:

- Todo quadrilátero é um retângulo?
- Todo retângulo é um quadrilátero?
- Há quadriláteros não retângulos?
- Há quadriláteros que não são retângulos nem losangos?
- O que é um quadrado?

Meta

Propiciar experiências que levem as crianças a estabelecerem uma classificação sobre os quadriláteros.

Comentários

É bastante comum que pessoas conheçam as figuras apenas pela sua forma estereotipada, isto é, na posição em que sempre aparece a maioria dos livros, mas sem se preocupar em identificar realmente as propriedades de cada uma. Desse modo, um mesmo quadrilátero é, às vezes, indicado por nomes diferentes, conforme a posição que ocupa.

Para evitar confusão, é preciso que os alunos, desde cedo, sejam motivados a examinar como propriedades de uma figura, para poder classificá-la (tem ângulos retos? quantos lados do mesmo tamanho?). Fonte: SÃO PAULO (1985b)

A próxima tarefa permite que os quadriláteros sejam classificados em função de seus ângulos e pelo tamanho de seus lados. Porém, essa classificação pode ser aprimorada quando o paralelismo entra também nos critérios. Analise a situação e perceba o contexto.

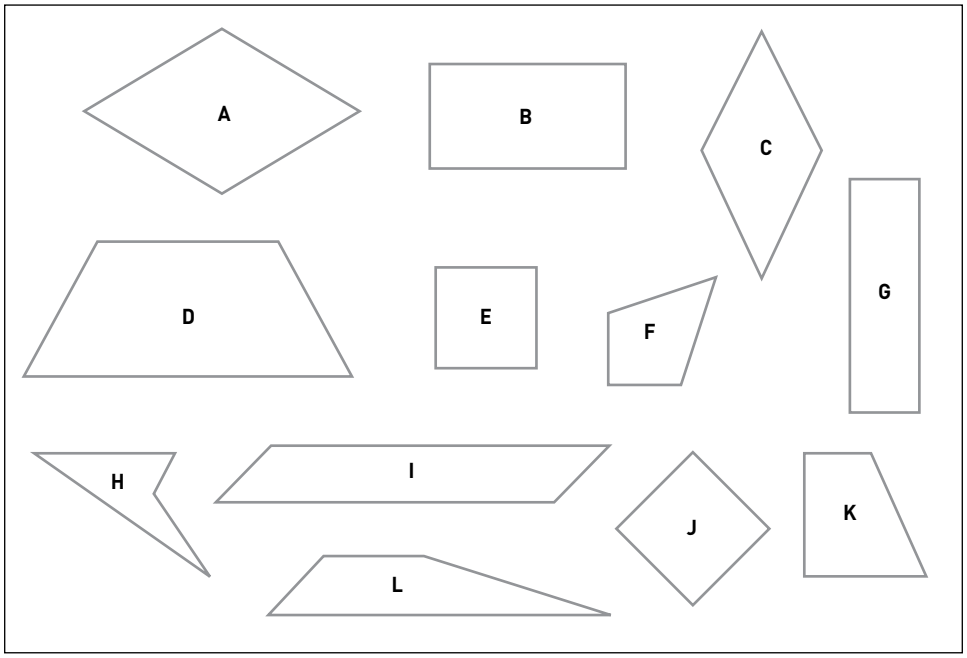
Quantos pares de lados paralelos?

Objetivo

Classificar quadriláteros utilizando, como critério, o paralelismo dos lados.

Material necessário

Uma folha para cada grupo contendo os mesmos quadriláteros usados na tarefa "Separando quadriláteros".



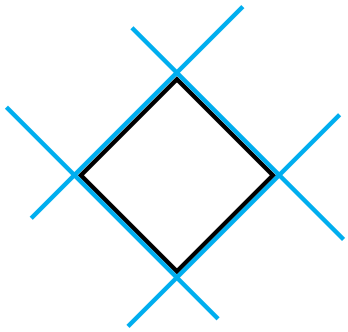
Desenvolvimento

1ª Parte

Divida a classe em grupos e entregue a cada grupo a folha realizada na tarefa "Separando quadriláteros". Relembre com a classe os critérios utilizados na disposição dessas figuras.

Em seguida, solicite às crianças que prolonguem os lados de um dos quadrados em ambos os sentidos, usando para isso uma régua. Oriente-as na execução desse traçado.

Pergunte o que a figura obtida representa para elas. Provavelmente, algumas crianças farão associação com superposições que fizeram na tarefa "As paralelas" e dirão que os lados opostos do quadrado são paralelos.



Coloque então a seguinte questão: como podemos garantir que as retas de cada um desses pares são realmente paralelas?

Deixe que as crianças discutam a questão e depois exponha suas conclusões. Diga então que quadriláteros que têm lados opostos e que são respectivamente paralelos são chamados **paralelogramos**.

Pergunte o que acham de outro quadrado colado nessa folha: ele também é um paralelogramo? Por quê? A seguir, passe a analisar tal propriedade nas figuras agrupadas na região 2 da folha produzida na tarefa "Separando quadriláteros": elas são paralelogramos? Por quê?

A mesma análise será feita para as figuras agrupadas na região 3. Neste caso, há uma dificuldade maior: o fato de os ângulos das mesmas não serem retos. Verifique o procedimento das crianças e, se necessário, oriente-as no sentido de como usar o círculo de papel ("transferidor") para analisar o paralelismo dos lados opostos dessas figuras.

2ª Parte

A tarefa agora é respondida nas seguintes questões, relativamente às figuras colocadas na região do quadro:

- Há algum paralelogramo nesse quadro?
- Há figuras com apenas um par de lados opostos paralelos?
- Todas as figuras têm pelo menos um dos lados opostos paralelos?

Respondidas essas questões, as crianças serão convidadas a recortar as figuras e a dispô-las numa outra folha, dividida em três partes: na primeira parte, ficarão as figuras que têm 2 pares de lados opostos paralelos; na segunda, as figuras que têm um só par de lados opostos paralelos; e na terceira parte, aquelas cujos lados opostos não são paralelos.

Figuras com 2 pares de lados opostos paralelos	Figuras com 1 só par de lados opostos paralelos	Figuras cujos lados opostos não são paralelos

Antes de colar as figuras, principalmente as da primeira parte, solicite a elas que façam uma organização nas mesmas; verifique como procedem e se chegam a separar quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos propriamente ditos.

Para finalizar, discuta com elas que nome podemos dar:

- Ao conjunto de figuras coladas na folha.
- Ao conjunto de figuras coladas na primeira parte.

Aproveite para introduzir o nome **trapézios** para denominar as figuras de segunda parte.

Meta

Identificar, dentre os quadriláteros, os paralelogramos e os trapézios.
(Fonte: SÃO PAULO - 1985b)

Para uma melhor sistematização dos conhecimentos construídos, e até mesmo para aprimorar o processo avaliativo, a tarefa a seguir permite a construção de polígonos a partir de propriedades previamente dadas. Note que é uma tarefa na qual o aluno chega à forma geométrica, e não mais parte dela. Analise as situações e perceba o contexto.

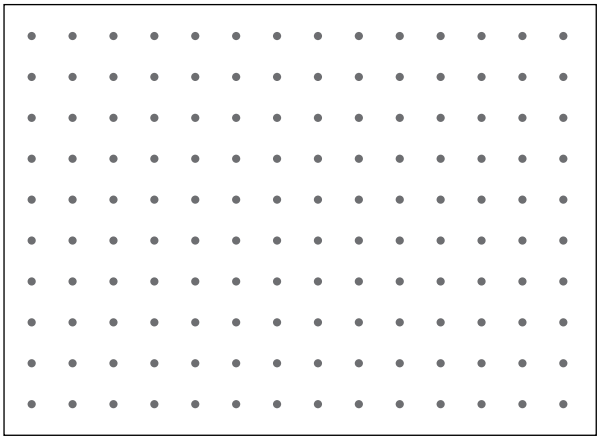
A rede pontilhada

Objetivo

Construir polígonos a partir de condições dadas para os laços ou para os ângulos.

Material necessário

Uma régua e uma folha com a malha pontilhada para cada aluno.



Desenvolvimento

1ª Parte

Entregue a cada aluno uma folha com a malha pontilhada. Solicite que, unindo pontos nela existentes e utilizando a régua, desenhe e pinte:

- Um paralelogramo que não seja retângulo nem losango (em azul claro).
- Um trapézio que tenha dois ângulos retos (em verde-claro).
- Um trapézio que não tenha ângulo reto (em vermelho).
- Um losango que não seja quadrado (em amarelo).
- Um triângulo que tenha um ângulo reto (em laranja).
- Um triângulo que não tenha ângulo reto (em marrom).

- Um polígono que não seja triângulo nem quadrilátero (em roxo).
- O menor quadrado possível (em verde-escuro).
- Um retângulo que não seja quadrado (em azul-escuro).

Essas solicitações, bem como as indicações das cores, podem ser coletadas na lousa.

2ª Parte

Terminada a tarefa, as crianças se reúnem em grupos, recortam as figuras e comparam as de mesma cor. Naturalmente, as figuras variarão em tamanho e proporções. Deixe que as crianças discutam se todas as figuras construídas satisfazem as condições pedidas. Ao final, deixe-as montar um painel figurativo com as peças coloridas. (Fonte: SÃO PAULO - 1985b)

Atente-se que a opção pela adoção dessa tarefa, adequada aos alunos de Terceiro ano, implica a antecipação do desenvolvimento da habilidade (EF04MA18), "Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria", ligada aos objetos de conhecimento "Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares" para o Terceiro ano.

Tais antecipações são admissíveis, uma vez que a especificação da habilidade em um determinado ano não significa que essa habilidade deva ser desenvolvida naquele ano, mas sim até aquele ano.

As tarefas apresentadas têm por finalidade apenas evidenciar os conceitos relacionados aos objetos de conhecimento presentes nas habilidades especificadas na BNCC. Por isso, não devem, em hipótese nenhuma, ser vistas como sequências didáticas.

2.2. Movimentação e localização

Entendemos que a Geometria vai muito além das figuras e das formas, pois está relacionada ao desenvolvimento e ao controle do próprio corpo do sujeito, à percepção do espaço que o rodeia e ao desenvolvimento de sua competência espacial. Essa competência implica tanto a capacidade de cada pessoa em identificar formas e objetos em seu meio quanto a capacidade de se orientar em um mundo de formas e objetos situados espacialmente.

A percepção espacial, entendida como a capacidade de se relacionar com o espaço físico por meio de formas, tamanhos e distâncias dos objetos que estão a sua volta (LE BOULCH, 1987, 1988), desenvolve-se desde as primeiras experiências de vida da criança até os anos iniciais de sua escolarização. Nesse processo, entre os 6 e 7 anos (GALAHUE e OZMUN, 2005), a criança começa a desenvolver sua lateralidade, e, ao iniciar o controle das partes de seu corpo, começa também a definir o seu lado dominante, desenvolvendo a noção de esquerda e direita.

A criança apropria-se das relações de espaço primeiramente pela percepção de si mesma, passando pela percepção dela no mundo ao seu redor para, então, chegar a um espaço representado por mapas, croquis, maquetes, figuras, coordenadas etc. Tal aproximação não é rápida nem simples e, no início, está estreitamente relacionada com a organização do esquema corporal, a orientação e a percepção espacial.

Assim, em um primeiro momento, a criança conhece o espaço sobretudo através do movimento. Noções como proximidade, separação, vizinhança, continuidade organizam-se em uma relação de pares de oposição (parecido/diferente, parte/todo, dentro/fora, pequeno/grande), de acordo com as explorações corporais que ela faz.

Note-se o quanto é importante o reconhecimento do próprio corpo como a principal referência para a definição da esquerda e direita e, também, de frente e atrás (noções essas também essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico).

Smole (2003, p.26) afirma que:

> *A criança organiza a relação corpo-espaço, verbaliza-a e chega assim a um corpo orientado que lhe servirá de padrão para situar os objetos colocados no espaço em torno de si, enquanto a orientação dos objetos ocorre em função da posição de seu corpo. Essa primeira percepção é o trampolim indispensável sem o qual a estruturação do espaço não pode efetuar-se.*

Nesse sentido, podemos afirmar que não há espaço que se configure sem envolvimento do esquema corporal, assim como não há corpo que não seja espaço e que não ocupe um espaço. O espaço é o meio no qual o corpo pode mover-se e o corpo é o ponto em torno do qual se organiza o espaço.

Outro aspecto a ser destacado é a faixa etária em que, segundo as pesquisas, ocorre o desenvolvimento da noção da lateralidade e, portanto, da necessidade de cuidados a serem tomados nas práticas escolares, durante o período de escolarização compreendido entre a Educação Infantil e os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Assim, as propostas de atividades para a unidade temática Geometria, nessa faixa etária, devem promover que o aluno conheça melhor seu próprio corpo. Porque, ao conhecê-lo, o aluno conscientiza-se de seu tamanho, da posição de seus membros, dos lados de seu corpo e, ao representá-lo, precisará utilizar procedimentos de observação, análise, proporcionalidade, além de manter algumas das características de sua imagem, que são habilidades importantes na configuração da percepção espacial e no desenvolvimento das primeiras noções de localização espacial.

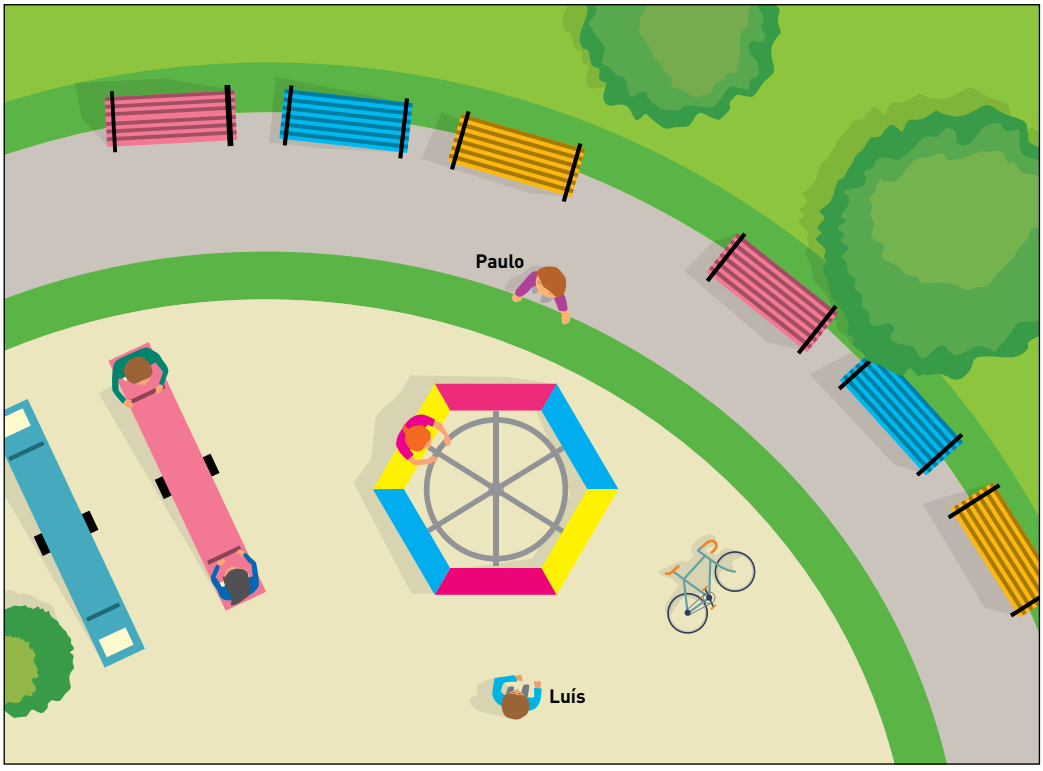
Para o **Primeiro ano**, são duas as habilidades especificadas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.
Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.	(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, embaixo, é necessário explicitar-se o referencial.

Como pode ser observado, na habilidade EF01MA11 a referência é o corpo da criança e as propostas para seu desenvolvimento devem levar esse fato em consideração, assim como a importância de atividades dessa natureza para o desenvolvimento da percepção espacial dos alunos. Na habilidade EF01MA12, o ponto de referência deixa de ser o corpo da própria criança.

Para o desenvolvimento dessa segunda habilidade se faz necessário problematizar as posições, desenvolvendo as noções de referencial externo e de referencial em relação à própria posição, discernindo uma da outra. Analise estas situações e perceba o contexto:

Imagine duas crianças, Luís e Paulo, brincando em um playground. Na visão de Luís, a bicicleta está à direita do gira-gira, ao mesmo tempo em que, para Paulo, ela está à esquerda do gira-gira. Nesta situação, o gira-gira foi o mesmo ponto de referência para a localização da posição da bicicleta, enquanto o referencial de que descreve mudou.



Para o **Segundo ano**, são duas as habilidades especificadas.

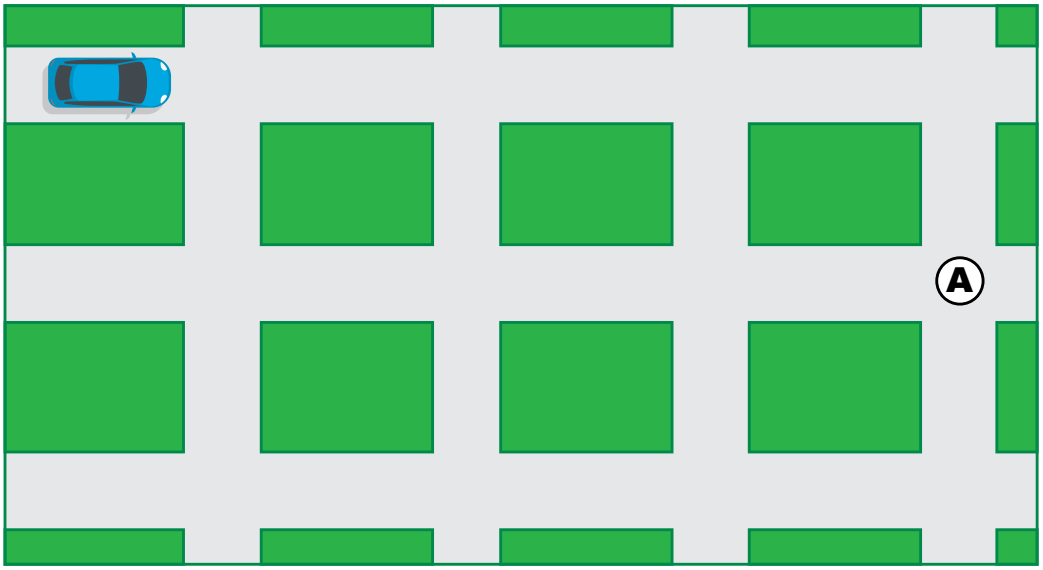
OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido.	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
Esboço de roteiros e de plantas simples.	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.

As habilidades EF02MA12 e EF02MA13 ampliam o repertório de conhecimentos dos alunos ao trazerem a noção de deslocamento, os conceitos de direção e sentido, acrescentando-os às noções de ponto de referência e de referencial (do próprio corpo ou externo a ele).

Essas noções, percebidas com o próprio corpo, devem ser exercitadas no ambiente escolar com diversas brincadeiras. Por exemplo, naquela em que um aluno dirige um colega que está de olhos vendados, sem um tocar no outro, usando apenas comandos verbais, como "vá para a frente três passos", "dê um passo para trás", "vire para a esquerda" ou "vire para a direita".

Somente após essa experiência com o próprio corpo é que as representações podem ser desenvolvidas. Analise estas situações e perceba o contexto:

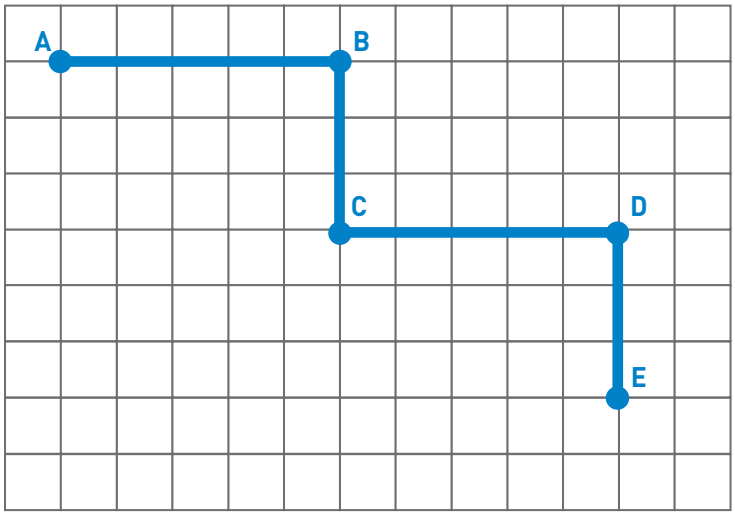
1) Quais são os caminhos mais curtos que o carro pode fazer para chegar até o ponto A? Descreva cada um deles.



Esta é uma tarefa bastante comum, que permite a exploração de diferentes formas de representação. O exercício permite introduzir códigos textuais ou imagéticos, como por exemplo:

Comando	Código textual	Código imagético
Para a frente	PF	
Para trás	PT	
Vire para a esquerda	VE	
Vire para a direita	VD	

2) Descreva o caminho para sair do ponto A e chegar ao ponto E, passando pelos pontos B, C e D.



Observe que nesta tarefa as habilidades requeridas para o seu cumprimento parecem ser as mesmas, mas não são.

É importante lembrar que direção deve ser representada por uma reta, indicando por exemplo "horizontal", "vertical" ou "oblíqua", enquanto o sentido deve ser indicado por uma seta, sempre para uma direção.

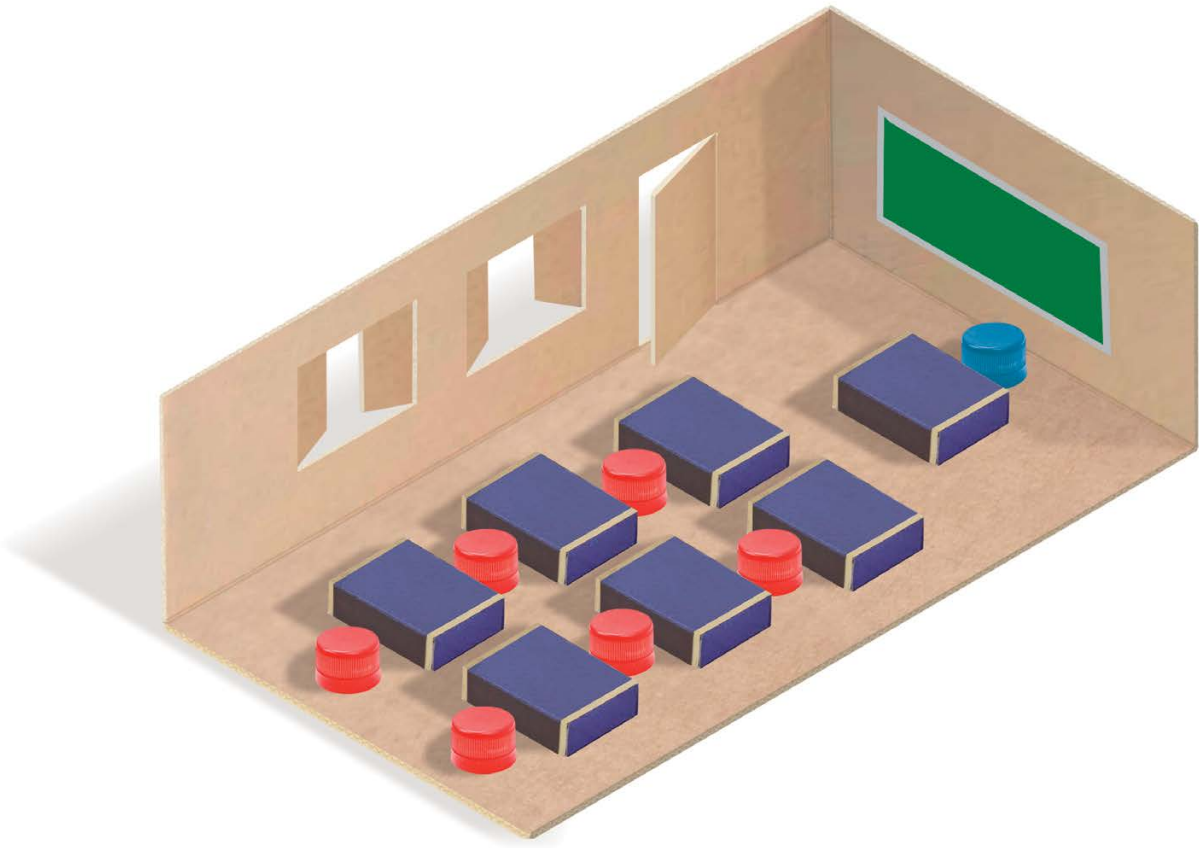
No caso da direção horizontal, por exemplo, o sentido pode ser da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, de frente para trás ou de trás para a frente. Já na direção vertical pode haver dois sentidos: de baixo para cima ou de cima para baixo. Note que para cada direção sempre há dois possíveis sentidos.

Muitas vezes, os termos direção e sentido são usados como sinônimos, o que, conceitualmente, é um equívoco. Analise a próxima situação e perceba o contexto.

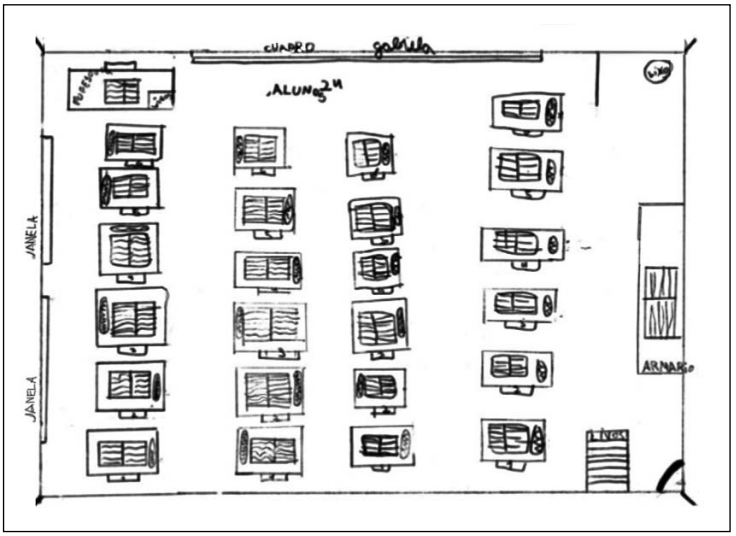
Imagine que você se encontra perdido em uma floresta, cuja mata é bastante fechada, em um dia chuvoso. Em sua caminhada, de repente, você encontra uma estrada de ferro. Dado o seu objetivo de querer chegar o mais rápido possível a algum povoado, esta estrada significa que você tem uma direção a seguir. No entanto, terá que decidir em qual sentido seguir.

Outro desafio nessas duas habilidades é a associação do espaço à sua representação bidimensional, quando se propõe o uso de planta. Esta última exige dos alunos a visualização do ambiente visto de cima e o reconhecimento de sua representação. São duas habilidades subjacentes à habilidade EF02MA13 significativamente complexas. Analise a situação seguinte e perceba o contexto.

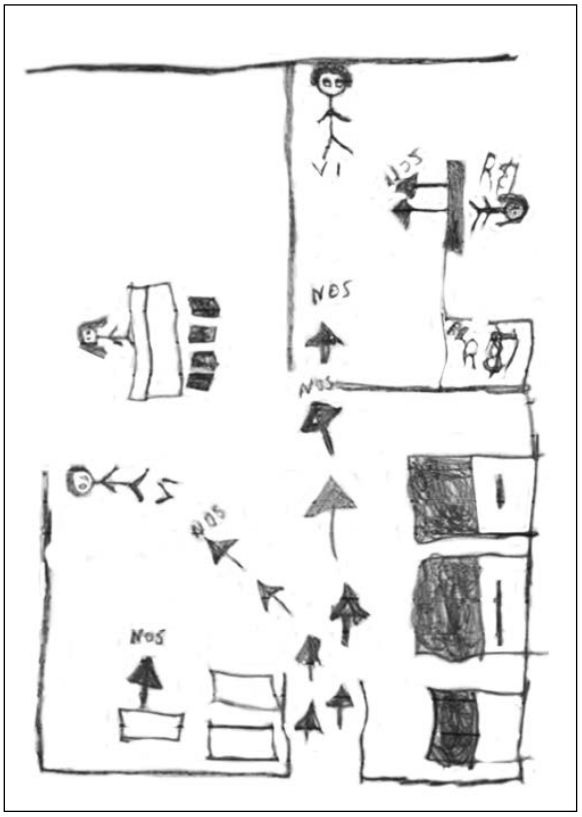
Solicitar a construção de uma maquete da sala de aula usando caixas é uma tarefa que exige um determinado conjunto de habilidades.



A observação, para a posterior representação dessa maquete, ajuda a desenvolver a visualização e a representação em planta da sala de aula, que exige um conjunto de outras habilidades.



Nesse estágio, quando as crianças representam, na planta de uma cidade (vista superior do ambiente), a fachada de alguns de seus edifícios (vista frontal do ambiente), isto é uma indicação de que as habilidades de visualização e sua representação precisam ser aprimoradas – obviamente, respeitando o processo do desenvolvimento do nível de pensamento geométrico.



A construção de maquetes digitais, usando alguns aplicativos disponíveis, é muito potente no desenvolvimento dessas habilidades.

Para os **Terceiro** e **Quarto anos** são especificadas duas habilidades.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência.	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido. Paralelismo e perpendicularismo.	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.

Como pode ser observado, as habilidades EF03MA12 e EF04MA16 podem ser vistas como um aprimoramento das habilidades dos anos anteriores, pois envolvem outros recursos de representação, como as malhas quadriculadas, mapas, plantas baixas e croquis, o que permite maior precisão nas representações. Além disso, conceitos geométricos, como paralelismo e perpendicularismo, e consequentemente ângulos, são também envolvidos.

Com essa ampliação conceitual, muitas conexões com outros ramos da Matemática podem ser exploradas para a atribuição de significados matemáticos. Um exemplo é quando os comandos de virar ou girar são requeridos: as noções e conceitos de ângulos e de números racionais se tornam potentes.

Para o **Quinto ano**, as duas habilidades especificadas incorporam as noções de coordenadas cartesianas e geográficas para, mais uma vez, aprimorar as mesmas habilidades relacionadas à localização e movimentação.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.	(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.
Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.	(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

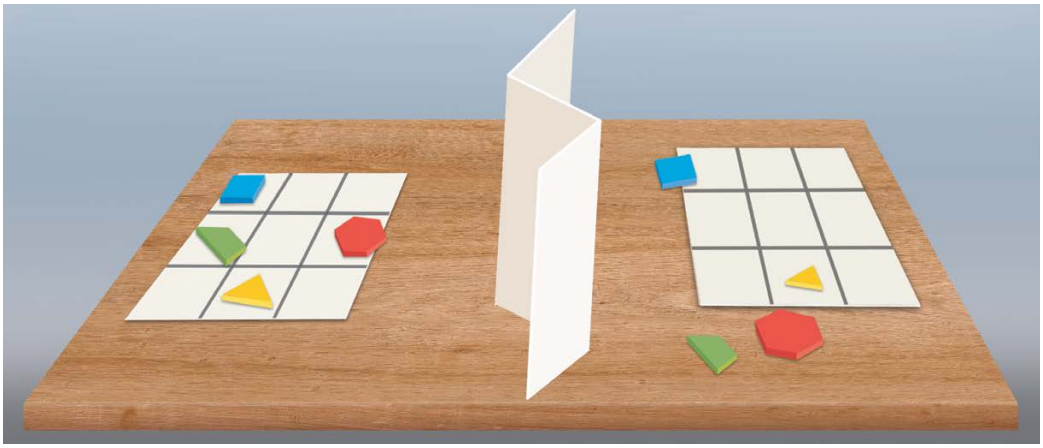
As práticas escolares que envolvem as coordenadas cartesianas, em geral, são consideradas muito difíceis. Essas considerações são legítimas e podem ser justificadas pelo uso sem significado das representações, da simbologia e das nomenclaturas usadas nessas práticas.

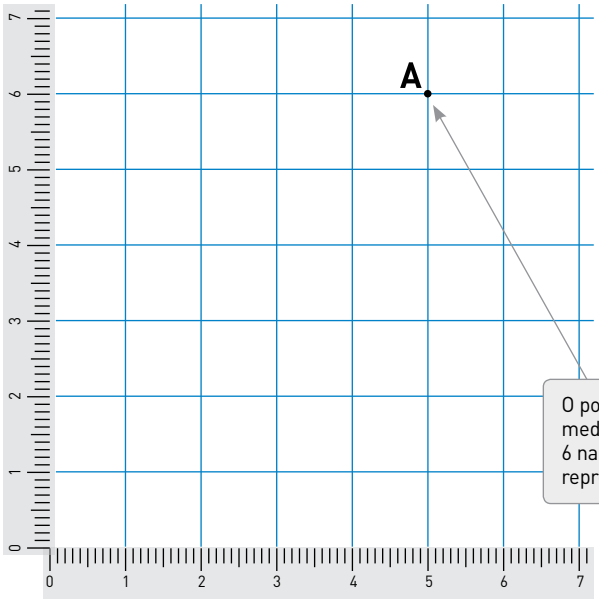
O seu reconhecimento em inúmeras práticas sociais - como em jogos (por exemplo, Batalha Naval e a identificação das casas no Xadrez), uso de planilhas eletrônicas, localização de um local pela sua latitude e longitude - pode trazer significado aos termos matemáticos como "pares ordenados", "abscissa e ordenada". Analise as próximas situações e perceba o contexto.

Walle (2009, p. 468) sugere a tarefa "Posições escondidas" para os alunos que estão no primeiro nível de desenvolvimento geométrico.

Para construir os tabuleiros do jogo, desenhe um quadrado de 12 cm em um tabuleiro. Subdivida os quadrados em uma malha quadriculada de 3 × 3. Dois alunos se sentam de frente um para o outro com uma "divisória" separando suas carteiras, de modo que nenhum deles possa ver o quadriculado do outro (como mostra a figura da próxima página).

Cada estudante possui quatro blocos geométricos diferentes. O primeiro jogador distribui os blocos em quatro seções diferentes da sua malha quadriculada. Ele então diz ao outro jogador onde colocar os blocos em seu tabuleiro, para que as posições coincidam com as suas. Quando as quatro peças estiverem posicionadas, verifica-se se as duas malhas estão iguais. Então, os jogadores trocam papéis. Modele o jogo uma vez fazendo o papel do primeiro estudante. Use termos tais como linha de cima, do meio, esquerda e direita.





Outro tipo de tarefa, comumente encontrada nas práticas que buscam desenvolver as noções cartesianas, pode ser assim exemplificada.

Observe como o ponto A foi localizado no plano. Em seguida, represente o ponto B (2;3), C (3,2), D (1,5) e E (5,1).

O ponto A foi localizado no plano usando a medida 5 na régua horizontal e a medida 6 na régua vertical. Por isso, ele é assim representado: **A (5;6)**

Ao comparar essas duas tarefas, estabeleça relação entre elas e as concepções de geometria egípcia e grega. Perceba também o quanto uma delas busca a atribuição de significado enquanto a outra valoriza os procedimentos. Ao final, note que elas são complementares.

2.3. Transformações geométricas

A simetria é uma ideia que tem sido experimentada através do tempo em artes, arquitetura e matemática para criar ordem, movimento, beleza e perfeição. Provavelmente, a partir da percepção da simetria na natureza, presente nas asas de uma borboleta ou nas flores, o homem descobriu que poderia aplicá-la na construção de templos, casas, esculturas ou nas realizações artísticas de pinturas, tecelagens etc.

De acordo com Rohde (1982), em matemática dizemos que uma figura possui simetria quando, aplicado a ela um movimento de reflexão, translação ou rotação, ela não se deforma, isto é, mantém seu tamanho e sua forma.

Basicamente, a reflexão é uma das três transformações geométricas isométricas, enquanto a simetria é uma característica que as figuras podem ou não ter.

Existem, basicamente, três tipos de transformações geométricas isométricas, aquelas em que a imagem produzida mantém as formas e tamanhos da figura original (objeto):

a) Reflexão
a) Rotação
b) Translação

Na BNCC, como podemos observar no quadro, o trabalho sugerido é apenas com a simetria de reflexão ou axial.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Congruência de figuras geométricas planas.	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Simetria de reflexão.	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.
Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Dentre todas as habilidades de Geometria especificadas na BNCC (2017), localizamos uma habilidade para cada ano (a partir do terceiro ano), as quais tratam sobre as transformações geométricas, propostas neste material.

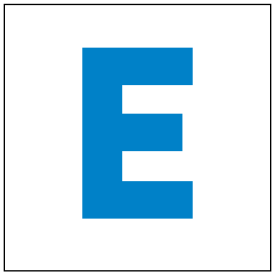
Essa pequena quantidade de habilidades não deve induzir ao equívoco de que há poucos conhecimentos envolvidos. Ao contrário, essas habilidades requerem a exploração de uma série de conceitos implícitos e subjacentes. Além disso, esses conceitos trazem uma significativa diversidade de termos e nomenclaturas. Muitas das habilidades são essências a serem desenvolvidas nesses anos de escolarização, porque nos anos seguintes elas serão necessárias.

A habilidade EF04MA19 evidencia essa diversidade. O objeto de conhecimento "simetria da reflexão", assim descrito, leva a entender que a reflexão é uma das possíveis simetrias.

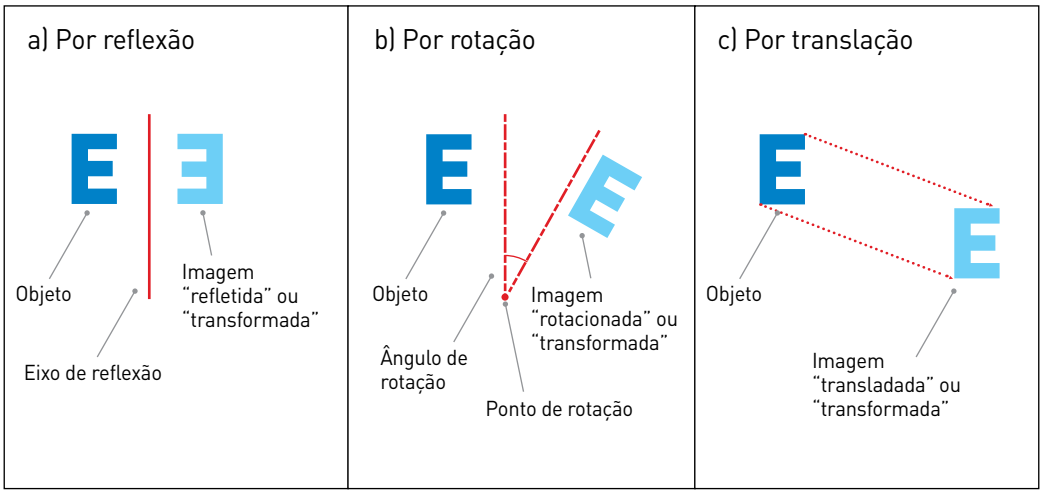
As atividades envolvendo a percepção das transformações geométricas são especialmente indicadas para auxiliar no desenvolvimento das habilidades espaciais, como a discriminação visual, a percepção de posição e a percepção de que a forma de uma figura não depende de seu tamanho ou de sua posição (constância de forma e tamanho). Essas habilidades são importantes não apenas para o aprendizado de Geometria, mas também para o desenvolvimento de habilidades de leitura e escrita.

Além disso, trabalhar com simetria permite aos alunos oportunidades para desenvolver a observação, a percepção de semelhanças e diferenças entre figuras, constituindo-se em uma forma de relacionar conceitos geométricos ao contexto social dos alunos, uma vez que a simetria pode ser facilmente observada na natureza e em obras de arte, entre outros elementos do cotidiano dos alunos. Analise estas situações e perceba o contexto.

Imagine que você tem a tarefa de reproduzir a seguinte figura de maneira que ela tenha o mesmo tamanho e forma, isto é, você pretende fazer uma transformação geométrica isométrica.



Há três opções de transformações isométricas a serem feitas:



Para fazer a reflexão, em princípio existe somente um objeto e, depois de definida a posição de um eixo de reflexão (algo visualizado e construído em uma determinada posição), a imagem é construída usando conceitos como retas, segmentos de retas, perpendicularismo, paralelismo e medidas de comprimento.

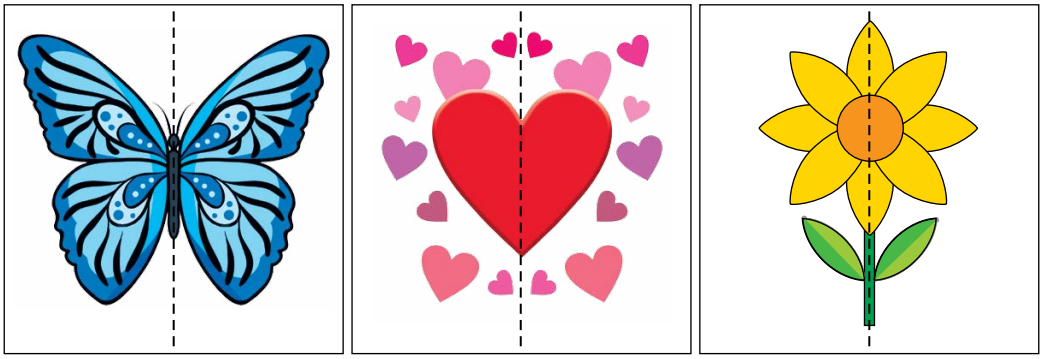
Para fazer a rotação, em princípio existe somente um objeto e, uma vez definidos o ponto de rotação e o ângulo de rotação (ambos sendo também construídos), a imagem é construída usando conceitos como retas, segmentos de retas, ângulos, perpendicularismo, paralelismo e medidas de ângulo e de comprimento.

Por fim, para fazer a translação, em princípio existe somente um objeto e, definidos o tamanho e o ângulo de translação (deslocamento), ambos sendo também construídos, a imagem é construída usando conceitos como retas, segmentos de retas, ângulos, perpendicularismo, paralelismo e medidas de ângulo e de comprimento.

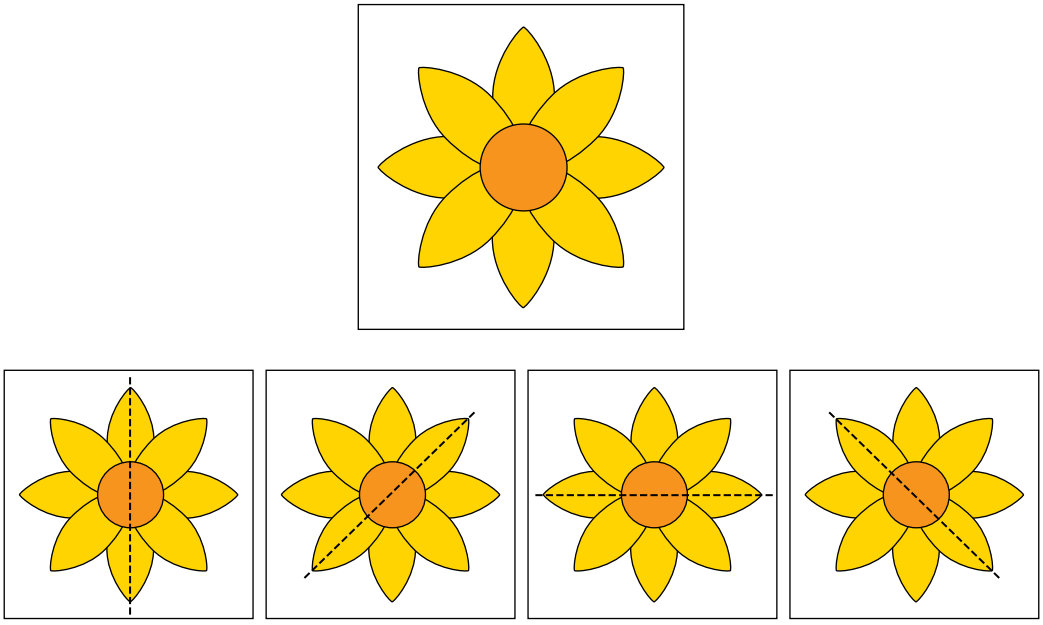
Observe que ao falar em reflexão (uma das três transformações geométricas isométricas), você está falando em, a partir de uma figura, produzir outra figura. Para isso, você precisa de um eixo de reflexão e usa diversos conhecimentos geométricos.

Uma das características da imagem refletida é que ela é simétrica em relação ao objeto. Ou seja, a simetria não é uma construção, mas pode ou não ser uma característica de uma figura.

Para identificar a simetria de uma figura é necessário visualizar um eixo de simetria. Esse eixo de simetria fica sempre no ponto médio da figura analisada. As imagens mais convencionais usadas para mostrar a simetria são, por exemplo, as borboletas, o coração e as flores.

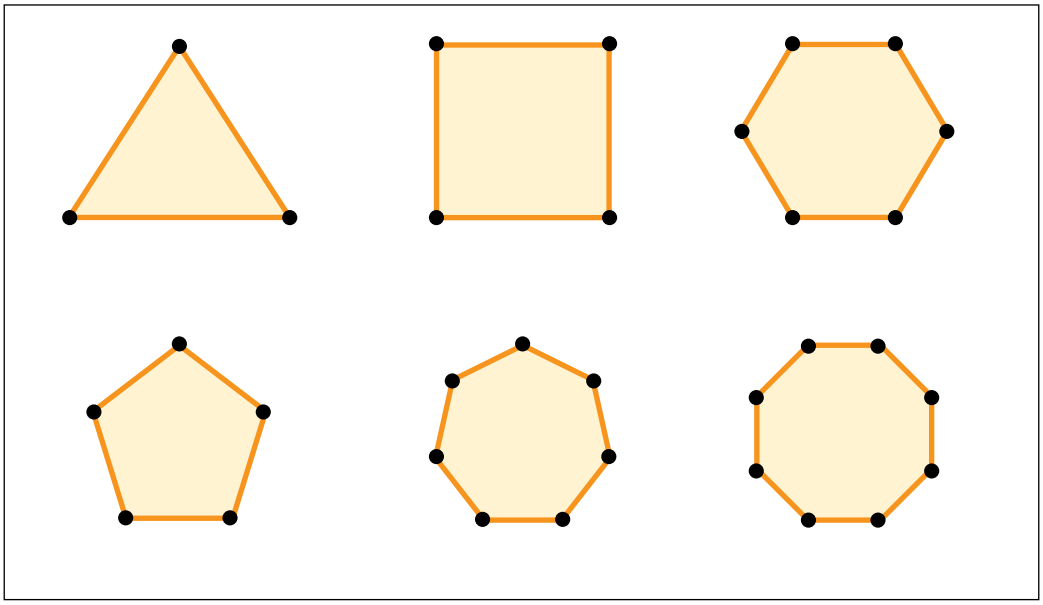


As três imagens anteriores apresentam um único eixo de simetria. No entanto, uma figura pode ter vários eixos de simetria, como mostra, por exemplo, a figura abaixo que possui quatro eixos de simetria.



Analise estas situações e perceba o contexto:

1) Qual a relação entre o número de eixos de simetria e o número de lados dos polígonos regulares?



Esta é uma tarefa adequada para o desenvolvimento do pensamento geométrico do Nível 2, uma vez que requer a associação dos eixos de simetria, que precisam ser visualizados, e o número de lados de cada um dos polígonos.

Observe agora que, ao falar em simetria, não estamos nos referindo à construção de uma imagem a partir de um objeto dado, mas sim em identificar se uma figura é ou não é simétrica. Note também que eixo de simetria e eixo de reflexão são conceitos diferentes.

São muitos os artistas que exploram os conceitos das transformações geométricas e simetria. Entre eles, destaca-se o holandês Maurits Cornelis Escher, nascido em 1898. Dentre muitos outros conceitos geométricos e das topologias (área da Matemática que rompe com os conceitos clássicos de distância e forma), Escher aplica em suas obras a ideia de pavimentação do plano, muito influenciado também pela geometria dos mosaicos muçulmanos.

Visite o museu virtual de Escher, acessível em: https://mcescher.com

2.4. Recomendações finais

Moura et al. (2008), após um estudo que analisou as práticas escolares mobilizadoras de cultura geométrica no quarto ano do Ensino Fundamental, observaram que, predominantemente, elas "têm como propósitos reconhecer partes de formas ou objetos tridimensionais mediante suas representações planas em papel e identificar exemplos e contraexemplos de determinados objetos geométricos planos através de seus desenhos no papel". (Moura et al., 2008, p. 112)

Além disso, os autores observam que tais práticas

> *[...] parecem se orientar com base no questionável pressuposto psicológico implícito de que o aluno, antes de realizar experiências espaciais situadas e submetê-las a uma problematização, precisaria reconhecer e distinguir perceptivamente (isto é, com base nos sentidos) figuras geométricas e/ou distingui-las conceitualmente através de definições euclidianas. E como se existisse um caminho linear e hierárquico a ser trilhado: 1) reconhecimento / exploração perceptiva (que geralmente se reduz a percepção visual) de formas geométricas; 2) definição, distinção e classificação de figuras geométricas (geralmente com base na visão e/ou nos termos de definições euclidianas); 3) representação visual padronizada de figuras, sem discussão ou problematização históricas e técnicas das necessidades que teriam orientado diferentes comunidades humanas a realizar representações de objetos e cenas tridimensionais em diferentes atividades e sem relativização cultural dessas diferentes formas de representação.*

Há muitos materiais publicados que convergem ao propósito principal deste material, que se pauta na crença de que, quando é atribuído significado ao que precisa ser aprendido, os alunos passam a dar sentido à atividades que precisam desenvolver diante das tarefas propostas por seus professores, tendo como resultado um aprendizado mais efetivo.

Nesta mesma direção, Moura et al. (2008, p. 117) recomendam que práticas escolares mobilizadoras de cultura geométrica nas séries iniciais da Educação Básica:

a) Procurem mobilizar, de maneira exploratória, outras geometrias além da euclidiana, tais como a geometria das semelhanças, a geometria esférica, a geometria projetiva, a topologia, a geometria do motorista de taxi etc.

b) Não sejam realizadas de forma autônoma, isto é, desconectadas de outras práticas culturais humanas que se realizam com base no estudo e exploração do espaço físico real, tais como: práticas topográficas; práticas de agrimensura; práticas arquitetônicas; práticas astronômicas; práticas náuticas; práticas cartográficas etc.

c) Procurem mobilizar os objetos geométricos, bem como as propriedades que os relacionam a outros objetos geométricos, através da problematização de práticas de divisão e demarcação do espaço físico; de medida do espaço físico; de orientação no espaço físico; de representação do espaço físico etc.

d) Sejam abordadas em sua historicidade, procurando viabilizar o constante diálogo entre o passado e o presente.

e) Sejam realizadas em conexão com outras práticas culturais humanas nas quais a visualização, a exploração crítica de imagens, a educação política e estética do olhar etc. são tomadas como objeto de investigação.

f) Sejam realizadas de modo a estimular o apagamento de fronteiras disciplinares entre a geometria, a geografia, a história política, a história econômica, a história social e cultural, a cultura artística e literária etc.

Parte 2

A unidade temática Grandezas e Medidas aparece na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) de maneira bastante peculiar, dado o seu alto inter-relacionamento com os objetos de conhecimento inseridos nas demais unidades temáticas e em sua relação com o ambiente onde os alunos estão inseridos.

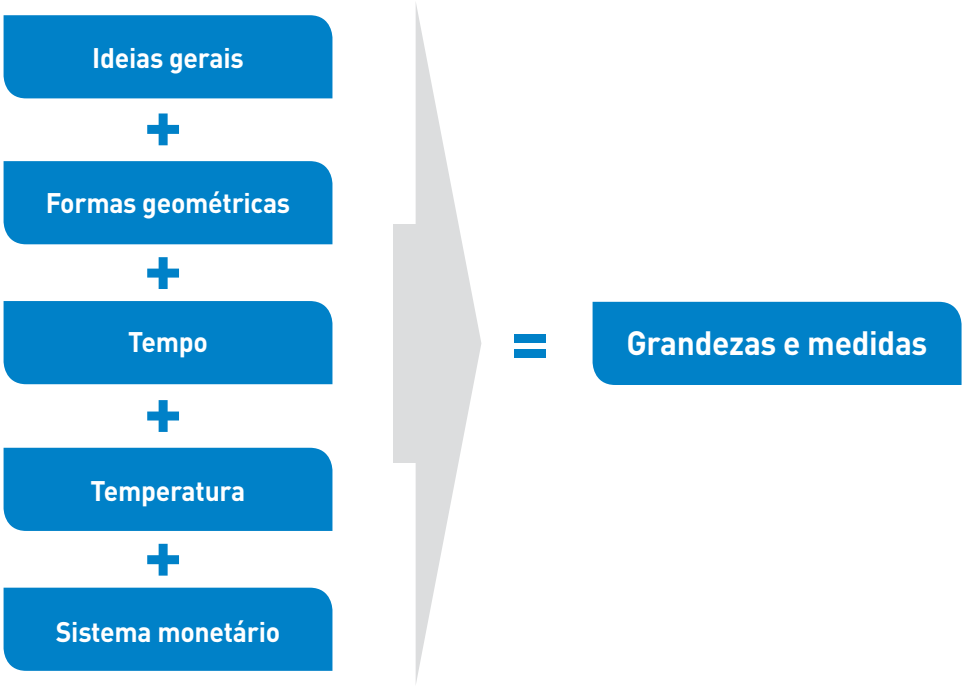
> *As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e Medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (BRASIL, 2017, p. 269)*

Como aparece na citação anterior, a frase "as medidas quantificam grandezas" evidencia que há uma diferença conceitual entre ambas. No entanto, é bastante comum o não conhecimento desta diferença e, por consequência, menos comum ainda encontrar respostas adequadas para as perguntas "o que é medir?" e "o que é grandeza?".

O objetivo desta segunda parte deste módulo é desvelar alguns conceitos subjacentes ao ensino da prática da medição, por vezes considerados óbvios ou exclusivamente intuitivos. O ensino de seus objetos de conhecimento e o desenvolvimento das habilidades desta unidade temática tem se caracterizado, ao longo do tempo, por um certo empirismo, isto é, o ensino da medição tem sido predominantemente resumido ao ensino de procedimentos.

Para a melhor organização didática desta segunda parte, os objetos de conhecimento e as habilidades a eles associadas e pertencentes à unidade temática de Grandezas e Medidas presente na BNCC (BRASIL, 2017) foram sintetizados em cinco grupos, devido à priorização que receberam na BNCC (BRASIL, 2017): Ideias gerais de medição; Medição associada às formas geométricas; Medição de tempo; Medição de temperatura e Sistema monetário.

Grandezas e Medidas

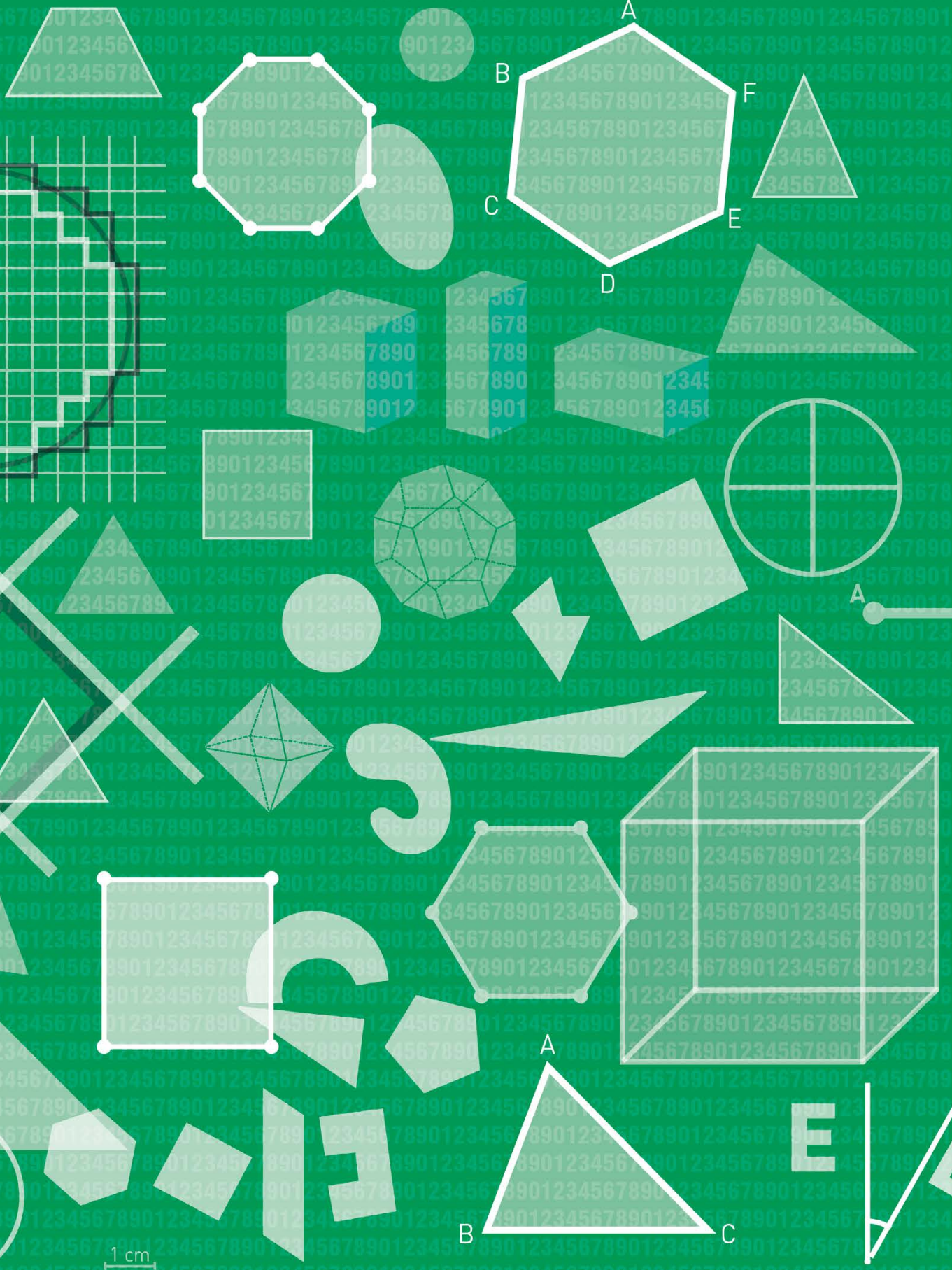


Antes de partirmos para o aprofundamento desses tópicos, é importante fazer alguns esclarecimentos sobre temas que são subjacentes às medições:

a) Discernimento entre grandezas e medidas.

b) Medir não é apenas comparar.

Após a abordagem desses dois aspectos, os quatro blocos de objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades serão analisadas.


A
B
F
C
E
D
A
A
B
C
E
1 cm

3 Aspectos subjacentes e importantes para o ensino de medição

A necessidade de medir sempre esteve presente no desenvolvimento da Humanidade e ainda o é na contemporaneidade, não só nas práticas sociais necessárias para a vida cotidiana, mas também naquelas que projetam o futuro. As medições são muito presentes no complexo avanço tecnológico das mais diversas áreas de atuação humana.

Essa relevância e até centralidade, em geral não percebida, justifica a importância de os sistemas educacionais e, portanto, das práticas de ensino, colocarem a devida atenção nesta unidade temática, geralmente relegada a segundo plano.

As orientações metodológicas presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) ainda devem ser consideradas para a elaboração de tarefas. No PCN, a unidade temática era denominada como sendo blocos de conteúdos (à época, ampliando os conteúdos até então vistos como apenas um sumário, classificando-os em conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais) e sinalizava que

> *Este bloco caracteriza-se por sua forte relevância social, com evidente caráter prático e utilitário. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica. (BRASIL, 1997, p. 39)*

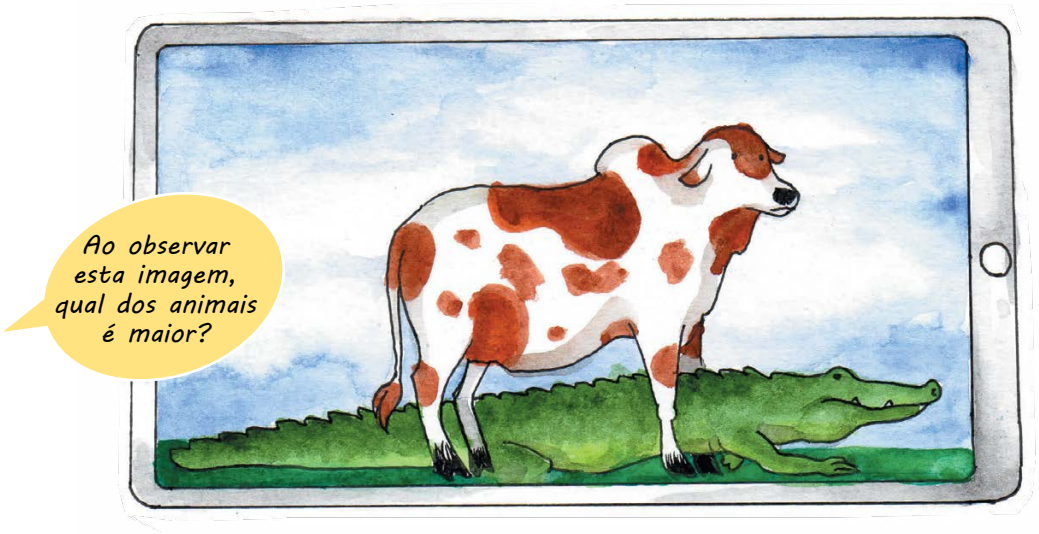
Considerando essa potencialidade inerente aos conhecimentos ligados à medição, é necessária melhor exploração também desta unidade temática, fazendo as conexões com as demais unidades temáticas. As propostas de ensino devem ocorrer de maneira que uma não seja privilegiada em detrimento da outra, mas sim uma complemente a outra, consolidando a importância de todas.

Esse contexto evidencia o quão complexo é o trabalho para planejar e executar tarefas de ensino da unidade temática de Grandezas e Medidas para que permitam o desenvolvimento dos conhecimentos e das habilidades matemáticas a ela relacionadas, com a devida profundidade e abrangência que a vida exige, mas ao mesmo tempo, proporciona.

3.1. Discernimento entre grandezas e medidas

Para atribuir significado a tais medições, é importante, antes de tudo, o discernimento entre os conceitos de grandeza e medida, apesar da indissociabilidade existente entre ambos.

Moura (1995), fundamentada em Caraça (1975), entende que o ato de medir pode se resumir ao ato de comparar e que, ao tomar Rouche (1990) como referência, entende que "pode-se comparar aquela qualidade que os objetos têm em comum, e que dividem com exclusividade com todos aqueles que lhes são declarados iguais, do ponto de vista dessa qualidade" (MOURA, 1995, p. 49). Em busca de uma síntese, é razoável entender que a grandeza é todo atributo ou uma qualidade de algo que pode ser comparado à de outro objeto.



Em nossas práticas cotidianas, fazemos comparações dessa natureza com uma frequência muito maior do que percebemos. Em quase todas nossas ações verificamos o quanto tudo com o que de alguma forma nos relacionamos são grandes, leves, altos, quentes, rápidos, áspero, macio etc. Ou seja, a pergunta "Quanto?" está comumente presente em nossas práticas, seja de maneira consciente ou inconsciente, voluntária ou não.

No entanto, apesar de as respostas a esses questionamentos serem bastante intuitivas, nem tudo que está subjacente a eles é tão óbvio quanto consideramos e, por isso, precisam ser problematizados para que os alunos possam aprender de forma significativa.

Por serem tão basilares e essenciais, esses questionamentos são induzidos já na primeira habilidade especificada na unidade temática de Grandezas e Medidas, a EF01MA15. Essa habilidade, descrita como "Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano", tem também sua importância por sua conexão com a construção do senso numérico, de ordenação.

No âmbito das Grandezas e Medidas, essa habilidade tem dois aspectos que precisam ser analisados.

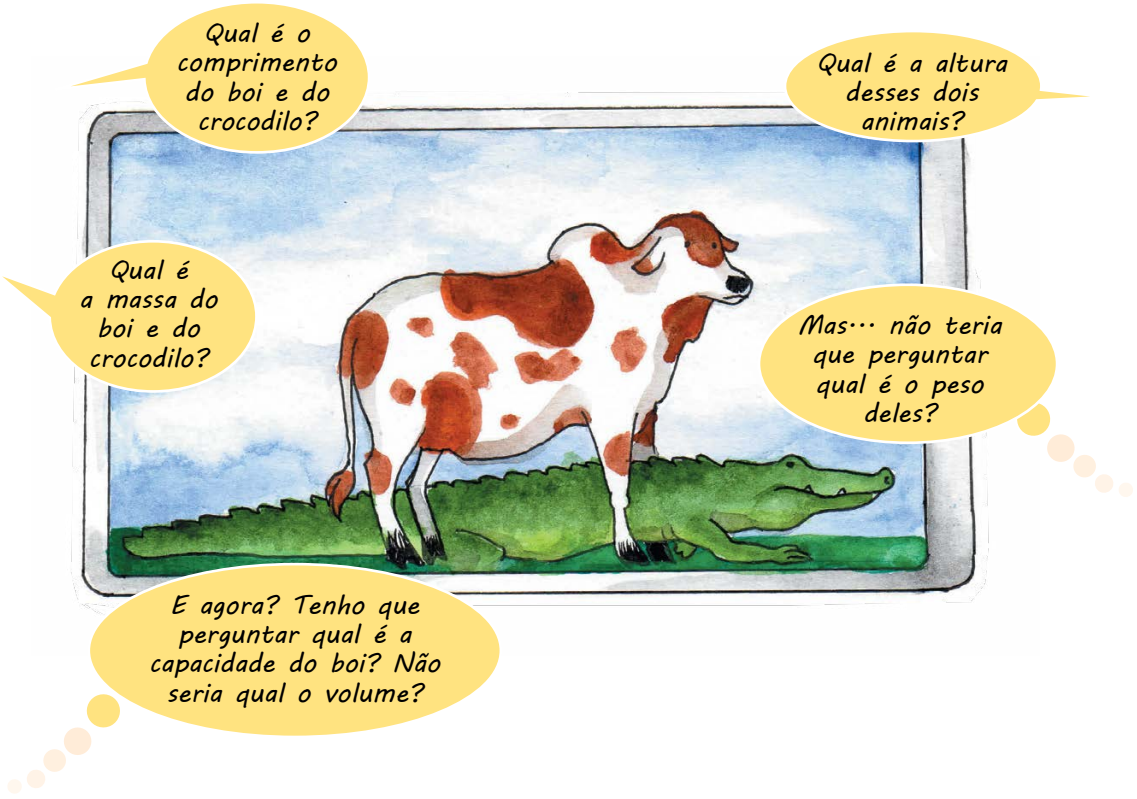
O primeiro aspecto, evidenciado na figura anterior, está relacionado com a não obviedade do critério de seleção do atributo a ser usado para a comparação. Ao comparar o boi com o crocodilo, o boi deve ser considerado maior que o crocodilo se a altura dos animais for a grandeza usada para a comparação. Mas o crocodilo deve ser considerado maior que o boi, caso o comprimento seja a grandeza de comparação. Serão as medidas dessas grandezas, feitas com o necessário uso de alguns instrumentos de medida, que indicarão com maior exatidão quanto um animal é maior que outro.

Caso a exatidão não seja necessária, uma estimativa pode ser feita, mas nesse caso uma operação mental usando alguma unidade de medida é empregada. Em ambos os casos, a medida, seja ela relacionada à altura ou ao comprimento, será apresentada por um número e uma unidade de medida mais adequada (centímetros ou palmos, por exemplo). Ainda nesse aspecto, é importante explicitar altura e comprimento de acordo com as noções de direção e sentido. Direção porque o comprimento leva a uma direção mais horizontal enquanto a altura, à direção mais vertical. Portanto, requerem a visualização de retas (ou segmentos de retas). Sentido porque ambos os animais podem ter suas alturas medidas ou estimadas de cima para baixo ou de baixo para cima, da mesma maneira que seus comprimentos podem ser medidos ou estimados da cabeça para o rabo ou do rabo para a cabeça.

Observe apenas neste primeiro aspecto desta primeira habilidade quantos elementos e conexões são necessários para simplesmente comparar. Por serem geralmente óbvios para quem ensina, mas nada óbvios para quem está aprendendo, devem ser cuidadosamente considerados nas práticas de ensino e aprendizagem.

O segundo aspecto não está diretamente relacionado à habilidade, mas sim aos objetos de conhecimento a que está associada na BNCC (2017), que é "Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais". Estes objetos de conhecimento remetem ao âmbito das medições de diferentes grandezas, enquanto a habilidade se limita ao âmbito das grandezas.

Um estudo e uma reflexão mais aprofundados sobre esses objetos de conhecimento, propostos no primeiro ano de escolarização (mas cujas noções podem e devem ser desenvolvidas desde a Educação Infantil), mostram que há muito de implícito nos poucos termos que os explicitam. Para ilustrar essa afirmação as perguntas sobre a mesma figura mudam.



Esses novos questionamentos evidenciam quantas são as noções elementares necessárias sobre grandeza, unidades de medida (convencionais, padronizadas ou não) e instrumentos de medida.

Mais uma vez, observe quantos são os conhecimentos subjacentes e não explícitos nas especificações da BNCC e que, portanto, requerem um estudo aprofundado.

Para Moura et al. (2008), a medição (ou o processo de medição) consiste basicamente em três ações elementares: "escolha de uma unidade de medida; comparação da unidade de medida com a grandeza a ser medida; e a expressão numérica dessa comparação" (p. 163), entendendo que o resultado da medição é um número sempre acompanhado da unidade de medida. O mesmo entendimento é dado por Caraça (1975) quando afirma que, para efetuar a medição de uma grandeza, é necessário estabelecer um padrão de comparação (ou melhor dizendo, uma unidade de medida) necessariamente específico a essa grandeza e, em seguida, a medida será o número de vezes que essa unidade de medida cabe naquilo que está sendo medido. Logo, para Caraça (1975), a medida também é dada por um número e uma unidade de medida.

Então, resumidamente, a medição, além de ser um processo de comparação entre duas grandezas de mesma natureza, deve ser entendida como sendo um processo que quantifica uma grandeza e, nesse contexto, a grandeza é aquilo que pode ser medido, direta ou indiretamente.

Para a adequada aprendizagem dos objetos de conhecimento e das habilidades a eles associadas nesta unidade temática, todas as noções e todos os conhecimentos subjacentes e não explícitos precisam ser devidamente articulados nas tarefas propostas aos alunos.

Segundo pesquisa feita por Policastro et al. (2018, p. 2)

> *Para adquirir a noção de grandeza, as crianças precisam passar por diferentes etapas, envolvendo, entre outras, redação correta e adequada ao expressar as grandezas e o uso de diferentes recursos e estratégias de mensuração. Nesse sentido, entender as estratégias de medição e os processos relacionados é muito mais complexo do que colocá-los em prática.*

Quando uma comparação é feita, na verdade, os atributos desse objeto são comparados. Dito de outra forma, esses atributos são as grandezas. Para exemplificar, diante de uma proposta de comparar o tamanho de uma revista com o de um livro, diferentes grandezas podem ser observadas: área, volume, altura, comprimento, espessura e massa.

Em sua pesquisa, Silva (2011, p. 62) caracteriza a noção de grandeza por:

1. O que se quantifica do corpo, do objeto, de espaço e do tempo.
2. O que se obtém por medida para quantificar e/ou atribuir qualidade.
3. O que permite uma comparação.
4. Sempre vem associada à necessidade de processo de medida.

Logo, são exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, capacidade, tempo, massa, temperatura, calor, rugosidade, transparência, energia, dentre muitos outros.

Há também grandezas que se derivam de outras, como por exemplo a velocidade de um objeto, que depende do comprimento percorrido e do tempo gasto; a densidade, que depende da massa e do volume do objeto; o peso, que depende da massa e da aceleração da gravidade; a vazão, que depende do volume que flui em algum lugar em um determinado tempo. Em cada campo de atividade humana há o predomínio de um conjunto específico de algumas grandezas e a desconsideração de outras.

Além disso, as grandezas podem ser:

a) Escalares ou vetoriais, ou seja, aquelas que têm ou não direção e sentido. A massa é um exemplo de grandeza escalar e a velocidade um exemplo de grandeza vetorial.

b) Discretas ou contínuas. As grandezas discretas são aquelas associadas à contagem e, portanto, a números inteiros. O tamanho de uma fila, definida pelo número de pessoas, é um exemplo de grandeza discreta, enquanto a altura de uma pessoa é um exemplo de grandeza contínua.

c) Medidas diretamente ou indiretamente. A altura de uma pessoa é um exemplo de uma grandeza que pode ser medida diretamente, enquanto o seu peso, só pode ser medido indiretamente (peso é uma força).

Compare a relação das grandezas envolvidas nas práticas de um enfermeiro, de um padeiro, de um piloto de avião, de uma dona de casa, de um engenheiro florestal, de um economista. São práticas que podem ser trazidas para a sala de aula e dar significado às práticas escolares.

3.2. Um pouco sobre a gênese das grandezas e medidas

É recorrente a afirmação que as grandezas e medidas são o elo entre os números e a geometria, tal como afirmam Clements e Stephan (2004): "As medidas ajudam a conectar os números e a geometria, cada um fornecendo suporte conceitual ao outro". (p. 24, tradução nossa)

No entanto, numa perspectiva da Etnomatemática parece ser mais razoável afirmar que as grandezas e medidas abrem os campos dos números e da geometria, uma vez que o ato de medir antecede às outras habilidades matemáticas inerentes ao ser humano, afinal as noções de tempo e espaço antecedem àquelas inerentes à Geometria.

Segundo D'Ambrósio (2011),

> *O aprendizado dos hábitos e comportamentos das espécies, não apenas de indivíduos, mostra o desenvolvimento da capacidade de classificar objetos [indivíduos] por qualidades específicas. Esse foi um passo decisivo, reconhecido há cerca de 40 mil anos, na evolução da espécie humana, dando origem à organização das primeiras sociedades. A cooperação entre grupos relativamente numerosos de indivíduos, centrada em mitos e representações simbólicas, foi provavelmente responsável pelo surgimento de canto [**tempo**] e dança [**espaço**], o que levou grupos de indivíduos a estarem juntos, situando em tempo e espaço seu universo simbólico. (p. 20, grifos do autor)*

É importante destacar que a mais rudimentar (e remota) habilidade matemática se circunscreve à Idade da Pedra Lascada e está relacionada às grandezas e medidas. Segundo esse mesmo autor,

> *A necessidade de se alimentar, em competição com outras espécies, é o grande estímulo no desenvolvimento de instrumentos que auxiliam na obtenção de alimentos. Assim, tem-se evidência de instrumentos de pedra lascada que, há cerca de 2 milhões de anos, foram utilizados para descarnar, melhorando assim a qualidade e a quantidade de alimentos disponíveis. É claro que a pedra, lascada com esse objetivo, deveria ter dimensões adequadas para cumprir sua finalidade. (D'AMBRÓSIO, 2011, p. 19)*

Até o próprio surgimento da Geometria, na concepção egípcia, mesmo sendo mais recente na história da Humanidade, é associado às práticas de medição para a divisão de terras, às construções arquitetônicas e observações astronômicas. (MIGUEL et. al., 2009)

> *O estudo do cálculo de áreas foi uma constante entre as antigas civilizações. Os métodos de determinação de muitas figuras geométricas fundavam-se basicamente na decomposição de tais figuras e posterior composição em outras de áreas conhecidas. (MIGUEL et. al., 2009, p. 21)*

Assim, percebe-se que os conhecimentos relacionados às grandezas e medidas sustentam a necessidade de conhecimento pertencente aos outros campos relacionados aos números e às formas.

3.3. Medir não é apenas comparar

Como já sinalizado anteriormente, as práticas de ensino que visam desenvolver habilidades ligadas à medição (e indissociavelmente às noções e conceitos de grandezas) não devem se limitar ao uso de instrumentos de medida e à subsequente contagem de unidades de forma procedimental (CLEMENTS e BATTISTA apud CLEMENTS e STEPHAN, 2004, p. 3).

Moura *et al*. (2008, p. 162) corroboram esse alerta quando afirmam que

> *as atividades escolares mobilizadoras de práticas de medição não se reduzam à mera apresentação de unidade de medida e de conversão de uma unidade em outra. É de fundamental importância que o trabalho com tais unidades e conversões seja antecedido pela apresentação e problematização das próprias grandezas físicas passíveis de medição, tais como: comprimento de uma curva, área de uma superfície, volume ocupado por um sólido, massa de uma substância, capacidade de um recipiente, tempo transcorrido, velocidade de um móvel, densidade de uma sustância, peso de um objeto etc.).*

Esses pressupostos são importantes para que as práticas escolares favoreçam a interação da criança com sua realidade e reconheçam "que existem atributos contínuos, como massa, comprimento e peso, embora não possa ainda quantificá-los ou medi-los com precisão" (CLEMENTS e STEPHAN, 2004, p. 3). São também importantes porque é justamente nesta fase que frequentemente a prática de medição, tão comum no cotidiano, se torna uma prática sem qualquer sentido, e consequentemente, mais difícil de ser aprendida. Segundo Miguel (2014),

> *Vemos as práticas escolares de mobilização de outras práticas não escolares como práticas que formatam estas últimas, enquadrando-as (e reduzindo-as drasticamente) ao esquema dicotômico básico "forma/conteúdo". Parece ser este o modo da "máquina escolar" operar: ela transforma uma prática cultural não escolar, dissociando-a em "conteúdo" e "forma" e reduzindo-a a apenas isso. Por exemplo, um "valor" não tem lugar nesse tipo de transformação; um "valor" evapora ou desaparece magicamente. (p. 6)*

Na mesma direção, a aprendizagem das medidas ocorre após o desenvolvimento do estabelecimento daquilo que se chama "senso de medida" (LORENZATO, 2009a). Nesse processo, a criança mobiliza vários recursos, como a percepção visual, a estimação, a comparação direta e comparação indireta. Somente depois de reconhecer a diferença entre dois objetos e compará-los com um terceiro é que se torna possível a conservação de medidas, quando surge a necessidade (e a possibilidade) das unidades de medidas padronizadas. Segundo o autor,

> *verifica-se que é longo e complexo o processo para a construção do conceito de medida: ele se inicia na comparação visual e direta entre dois objetos; depois vem a comparação indireta; passa pela utilização da unidade de medida, primeiramente não padronizada e, depois, padronizada. E assim vai evoluindo o senso de medida, que é fundamental para a construção do conceito de medida. Este culmina quando a medida for compreendida como uma relação. (LOREZANTO, 2009a, p. 56)*

Complementando esse processo, Moura et al. (2008) recomendam que

> *As próprias crianças, em um trabalho preliminar com o problema da medição, sejam incentivadas a produzir as suas próprias unidades de medida, e que, em tal trabalho, sejam também contempladas as discussões relativas à importância social da padronização da unidade de medida em um mesmo contexto cultural e à coexistência de sistemas de medida diferentes no âmbito da sociedade como um todo, de onde advém a importância da discussão sobre o problema da conversão de um sistema a outro. (p. 163)*

Muitos outros aspectos que interferem na aprendizagem de medidas precisariam ser elencados para uma melhor constituição deste campo conceitual. Moura et al. (2008) trazem um conjunto de recomendações necessárias para o ensino das Grandezas e Medidas. A primeira dessas recomendações se refere à abrangência que o seu ensino deve ter.

> *As atividades escolares mobilizadoras de práticas de medição não se reduzem à mera apresentação de unidades de medida e de conversão de uma unidade em outra. É de fundamental importância que o trabalho com tais unidades e conversões seja antecedido pela apresentação e problematização das próprias grandezas físicas passíveis de medição, tais como: comprimento de uma curva, área de uma superfície, volume ocupado por um sólido, massa de uma substância, capacidade de um recipiente, tempo transcorrido, velocidade de um móvel, densidade de uma substância, peso de um objeto etc. Além disso, seria pedagogicamente pertinente que essa problematização fosse acompanhada pela distinção entre grandezas que possuem módulo (intensidade), direção e sentido (tais como, por exemplo, as grandezas força, velocidade, aceleração etc.) e aquelas que possuem apenas módulo (intensidade), tais como, por exemplo, as grandezas massa, temperatura, área, volume, densidade etc. (MOURA et al., 2008, p. 162)*

Esses mesmos autores, reconhecendo a história da Matemática como um dos quatro recursos para fazer matemática em sala de aula (BRASIL, 1997), recomendam que:

> *o problema da medida seja problematizado historicamente, pondo-se em evidência os modos como vários povos responderam a esse problema, bem como o surgimento, com a revolução francesa, da discussão relativa à padronização dos vários sistemas de medida [e ...] em seus aspectos social e cultural, pondo-se em evidência as diferentes práticas socioculturais nas quais tal problema se manifestou na história, tais como as práticas de orientação espacial, de medição do tempo, de práticas arquitetônicas, topográficas, náuticas, comerciais, astronômicas, de agrimensura, de estocagem e armazenamento de objetos sólidos e líquidos etc. (MOURA et al., 2008, p. 163)*

A atenção dos professores, ao abordarem a unidade temática de Grandezas e Medidas, não deve se esquecer dos instrumentos de medidas, sua construção e uso.

> *Também é importante que sejam apresentados, bem como efetivamente construídos com as crianças, alguns instrumentos antigos de medida de distâncias, de ângulos, de tempo etc., discutindo-se com elas os procedimentos de construção e os modos de utilizá-los em medições efetivas; que as crianças sejam incentivadas a realizarem efetivamente vários tipos de medições, tais como: medir com régua graduada e outros instrumentos a distância entre dois pontos numa folha de papel, bem como o comprimento de segmentos de reta que constituem lados de figuras planas ou arestas de figuras não-planas; medir com barbantes, fitas métricas, trenas etc. a distância entre dois pontos acessíveis do espaço físico real; medir, através de técnicas adequadas, a massa, a capacidade e o volume de objetos; medir a superfície de figuras planas, de partes de figuras não-planas e de partes de objetos concretos situados no espaço real; medir sombras de uma estaca cravada perpendicularmente ao solo em vários momentos do dia; medir a altura e o azimute do Sol; medir o tempo transcorrido para a realização de um evento etc. (MOURA et al., 2008, p. 163)*

Perceba os diversos contextos que podem ser usados para a atribuição de significado, a fim de auxiliar o desenvolvimento dos objetos de conhecimento e suas habilidades inerentes a esta unidade temática.

Clements e Stephan (2004) sugerem seis conceitos que sustentam o aprendizado das crianças acerca da medição de comprimento e que ajudam no entendimento sobre como eles pensam sobre o espaço ao mesmo tempo que suas ações físicas para efetuar a medição. Os conceitos são denominados pelos autores como particionamento, iteração, transitividade, conservação, acúmulo e número.

O conceito de particionamento está relacionado à ideia de que o objeto a ser medido pode ser dividido em partes, segundo a grandeza a ser medida. Essa partição é importante em duas distintas situações. A primeira, mais comum, ocorre quando o objeto a ser medido é maior do que a unidade usada para a medição. Nesse caso, o aluno visualiza toda a extensão a ser medida e mentalmente a subdivide em parte do tamanho da unidade de medida. A segunda situação é aquela que o objeto a ser medido é menor do que a unidade de medida e, por isso, é a unidade que mentalmente é dividida.

A iteração está relacionada à ação física feita para quantificar o número de vezes que aquela unidade de medida (ou subdivisão dela quando ocorre a segunda situação citada no parágrafo anterior) cabe em toda a extensão do espaço a ser medido. Não se trata de algo banal, uma vez que essa iteração consiste em um processo repetido de vezes, em que desde o início a unidade de medida é colocada de forma a percorrer todo o espaço (unidimensional, bidimensional e/ou tridimensional) até que seja preenchido. Esse processo, no qual toda a extensão é percorrida pela unidade de medida, deve ser contínuo, ou seja, a colocação da unidade de medida não pode ter sobreposição, tampouco espaços. Analise a seguinte situação e perceba o contexto.

Quanto mede a largura desta mesa, usando-se uma caneta como unidade de medida?

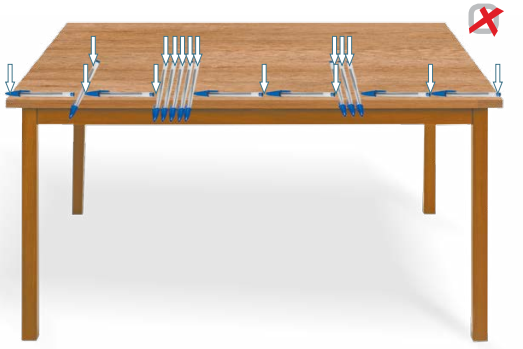
Observe na figura ao lado que foram necessárias sete canetas – ou a mesma caneta foi colocada sete vezes – para que o comprimento da caneta cobrisse toda a extensão da largura da mesa.

Observe também que a colocação das canetas:

a) Não deve conter espaços entre elas (neste exemplo, o tamanho seria de seis canetas).

b) Não deve haver sobreposição entre elas (neste exemplo, o tamanho seria de dez canetas).

c) Não deve haver mudança do atributo da unidade de medida usada (neste exemplo, o tamanho seria de quinze canetas).



A transitividade é uma propriedade que permite comparar as grandezas de dois distintos objetos usando um terceiro para auxiliar a medição. De maneira análoga ao que acontece com os números, quando um número é maior que o segundo e este segundo é igual ou maior que um terceiro, então pela propriedade da transitividade o primeiro número é certamente maior que o terceiro. Kamii e Clark (1997) explicitam a importância da transitividade para que as crianças possam entender os processos de medição citando um dos experimentos de Piaget.

> *Na tarefa "Torres", Piaget et al. (1960) mostraram um pequeno bloco à criança e perguntaram se poderia ser usado para comparar a altura das duas torres. As crianças, que poderiam usar o princípio da transitividade, se dividiram em dois grupos: o grupo menos avançado disse que o pequeno bloco era pequeno demais para ser útil, mas o grupo mais avançado o usou como uma unidade para iterar e contar. (KAMII e CLARK, 1997), p. 118)*

Complementando esse esclarecimento, Clements e Stephan (2004) afirmam que:

> *Transitividade é o entendimento de que, se o comprimento do objeto 1 for igual (ou maior / menor que) ao comprimento do objeto 2, e o objeto 2 tiver o mesmo comprimento que (ou maior / menor que) o objeto 3, o objeto 1 terá o mesmo comprimento que (ou maior / menor que) o objeto 3. As crianças podem, por exemplo, usar um bastão para avaliar se duas torres, uma no chão e outra na mesa, têm a mesma altura. Uma criança que pode raciocinar dessa maneira pode usar um terceiro meio ou item (o bastão) como um referente pelo qual comparar as alturas ou comprimentos de outros objetos. (CLEMENTS e STEPHAN, 2004, p. 27)*

A conservação é o mesmo conceito presente nos experimentos piagetianos e também necessários para a compreensão dos processos de medição, uma vez que é necessária a percepção de que as medidas de um objeto não se alteram quando ele é movimentado.

O conceito de acúmulo se refere ao entendimento de que, no processo no qual as iterações são feitas, de maneira que a unidade de medida escolhida percorre toda a extensão do espaço a ser medido, o número de iterações realizadas representa a medida da grandeza.

Por fim, o último conceito proposto por Clements e Stephan (2004) é relacionado ao conceito de número, uma vez que trata da quantidade de iterações acumuladas e necessárias para o cobrimento da grandeza a ser medida.

É importante salientar que esses seis conceitos apresentados por Clements e Stephan (2004) são válidos para comprimento, resultado de suas pesquisas, ou seja, uma grandeza relacionada ao tamanho dos elementos geométricos retilíneos e unidimensionais.

Para a determinação de áreas, grandeza relacionada ao tamanho de uma superfície, muitos desses conceitos permanecem, apesar das dificuldades relacionadas à conservação. Muitos alunos resistem em aceitar que, ao cortar uma determinada região e reorganizar suas partes para dar outra forma, a área permanece a mesma.

Para a medição de superfícies associada à área como grandeza, Clements e Stephan (2004) chamam a atenção para os seguintes conceitos: particionamento, iteração de unidade, conservação, estruturação de uma matriz e medição linear.

Conceitos para a medição de comprimento	**Conceitos para a medição de área**
Particionamento	Particionamento
Iteração	Iteração de unidade
Transitividade	Conservação
Conservação	Estruturação de uma matriz
Acúmulo	Medição linear
Número	

As pesquisas realizadas por Clements e Stephan (2004) mostram que os alunos que se encontram nas faixas etárias correspondentes ao início da escolarização usam estratégias diferentes para fazer julgamentos de área. Por exemplo, crianças de 4 e 5 anos podem corresponder a apenas um lado dos números ao tentar comparar suas áreas. Elas também usam regras como adicionar as medidas da altura e largura para determinar a área. Crianças de 6 a 8 anos usam uma regra de extensão linear, como a diagonal de um retângulo. Somente após essa idade, a maioria das crianças passa a regras multiplicativas. Por isso,

> *Os alunos precisam estruturar uma matriz para entender a área como verdadeiramente bidimensional. As crianças desenvolvem-se através de uma série de níveis no desenvolvimento dessa difícil competência, incluindo o seguinte:*
>
> *a) Pouca ou nenhuma capacidade de organizar, coordenar e estruturar o espaço bidimensional (não pode representar a cobertura de um retângulo com ladrilhos sem sobreposições ou lacunas).*
>
> *b) Cobertura completa, mas contando incorretamente (não pode acompanhar quais unidades foram contadas; por exemplo, conta em torno da borda e depois conta sistematicamente unidades internas).*

c) Cobertura e contagem, mas novamente sem estrutura de linha ou coluna.

d) O uso local incompleto de linhas ou colunas (por exemplo, conta algumas, mas não todas as linhas como uma unidade).

e) Estruturar o retângulo como um conjunto de linhas.

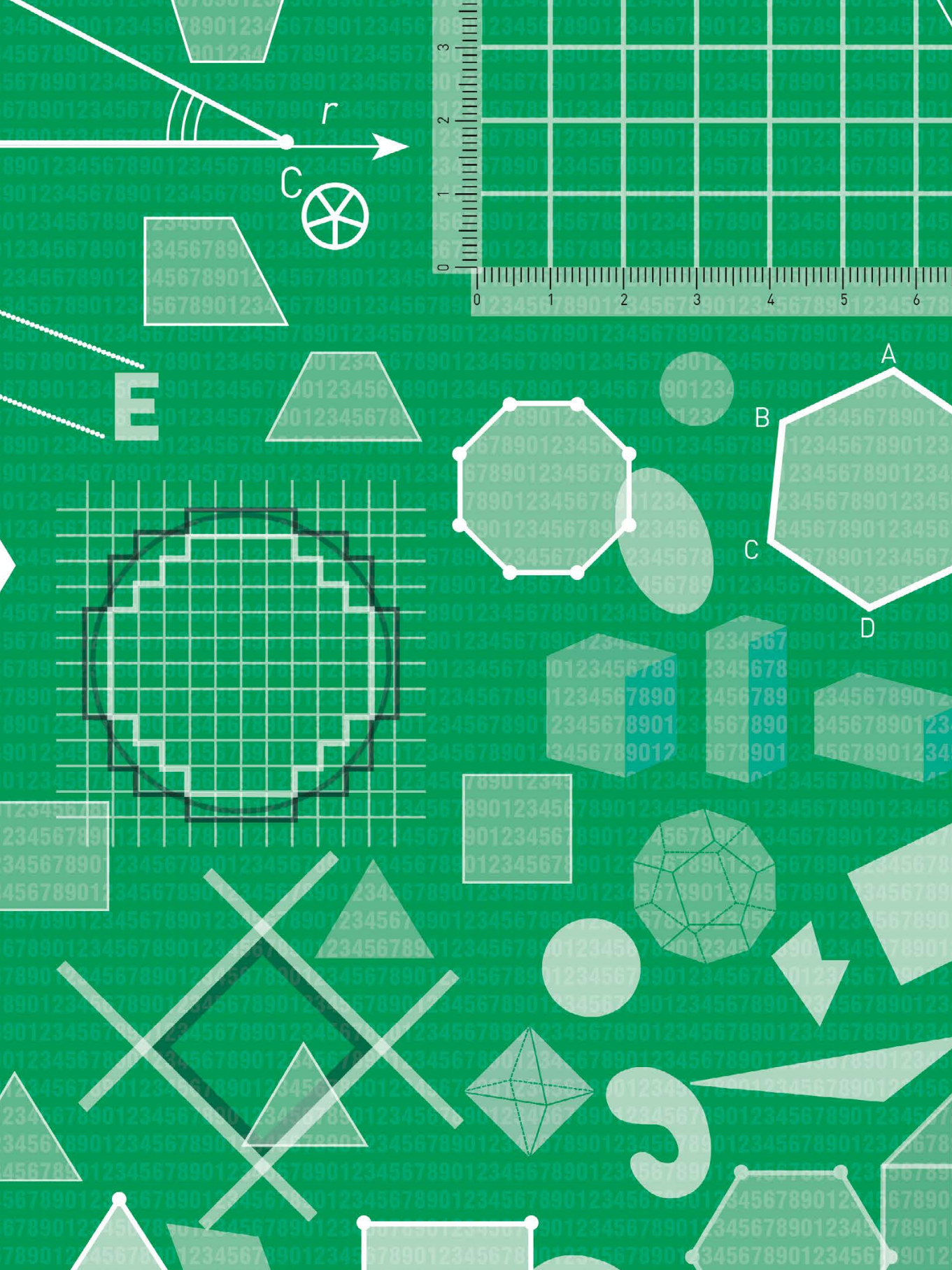
f) Iterando essas linhas (por exemplo, contando cada linha de 5, "5, 10, 15 ...".

g) Iterando as linhas em coordenação com o número de quadrados em uma coluna (por exemplo, contando até 5).

h) Entender que as dimensões do retângulo fornecem o número de quadrados em linhas e colunas e, assim, calcular significativamente a área dessas dimensões. (CLEMENTS e STEPHAN, 2004, p. 17)

Sem todas essas habilidades associadas aos diferentes conceitos aqui explicitados, o uso de fórmulas ou regras pelos alunos é feito apenas de maneira memorizada e procedimental, sem qualquer significado, sendo essa uma das principais causas da confusão entre os conceitos como perímetro e área.

E agora, medir é só comparar?


r
C
E
A
B
C
D

4 Os objetos de conhecimento de Grandezas e Medidas. A geometria e as habilidades especificadas na BNCC

Assim como ocorreu com a unidade temática de Geometria, os objetos de conhecimento e as habilidades referentes a Grandezas e Medidas precisam ser aprofundados ao longo do tempo. Há pouco material produzido e é um campo que precisa ser mais bem explorado pela Educação Matemática, como área de pesquisa.

Nesta seção, a lógica da abordagem, para melhor organização didática da apresentação dos conteúdos, será a mesma que a usada em Geometria. Ou seja, as habilidades especificadas na unidade temática Grandezas e Medidas foram relacionadas e reunidas em cinco grupos, como citado anteriormente:

a) Ideias gerais de medição.

b) Medição associada às formas geométricas.

c) Medição de tempo.

d) Medição de temperatura.

e) Sistema monetário.

Em cada um desses agrupamentos, quando necessário, é feita uma nova divisão por ano de escolarização no qual ela foi especificada, para que os elementos centrais possam ser mais bem percebidos e analisados.

4.1. Ideias gerais de medição

A habilidade relacionada às Grandezas e Medidas especificada no **Primeiro ano** de escolarização já foi amplamente analisada nas seções anteriores.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais.	(EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.

É importante relembrar que estas noções têm seu desenvolvimento iniciado aos quatro meses de vida e que as experiências proporcionadas a elas durante o período da Educação Infantil são extremamente importantes para a continuidade a ser dada no Ensino Fundamental. Por este motivo, as avaliações diagnósticas, pautadas sobretudo em observações, são essenciais para que seja possível o melhor ajuste das práticas de ensino à realidade das crianças. Uma realidade que, em geral, mostra uma significativa heterogeneidade nessas experiências.

Esta habilidade EF02MA17, no **Segundo ano** de escolarização, traz inúmeros elementos que carregam, de maneira subjacente, muitos outros conhecimentos: estimar, a diferença entre medir e comparar massas, unidades de medidas padronizadas e não padronizadas e noções dos múltiplos e submúltiplos de unidades de medidas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medida de capacidade e de massa: unidades de medida não convencionais e convencionais (litro, mililitro, centímetro cúbico, grama e quilograma).	(EF02MA17) Estimar, medir e comparar capacidade e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medida não padronizadas ou padronizadas (litro, mililitro, grama e quilograma).

Para Walle (2009), a "estimativa de medidas é o processo de usar informação mental e visual para medir ou fazer comparações, sem o uso de instrumentos de medida" (p. 427). Esta é uma definição que evidencia também a diferença entre medir e comparar, sendo que esta segunda ação se resume a uma análise mais qualitativa entre os atributos de dois objetos, enquanto a primeira engloba a segunda numa perspectiva quantitativa.

Este autor sugere quatro técnicas para estimar medidas.

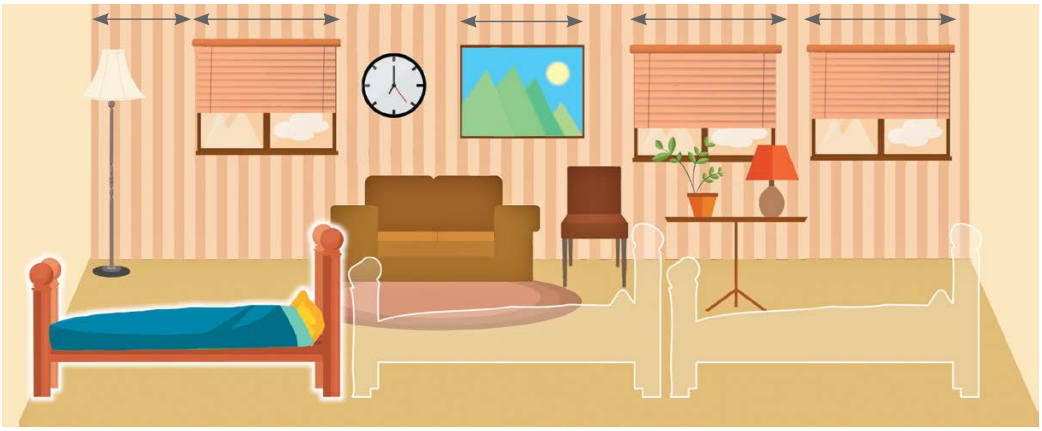
Técnicas para estimar medidas, propostas por Wall (2009, p. 427)

1. Desenvolver e usar referenciais ou referentes para unidades importantes. Essa estratégia também foi mencionada como um modo para desenvolver familiaridade com unidades. As pesquisas em educação matemática mostram que os alunos que construíram referências mentais e pontos de referência para medidas e praticaram usando-as em atividades na turma são estimadores muito melhores do que estudantes que não aprenderam a usar referências (Joram, 2003). Referentes devem ser coisas que sejam facilmente apreciadas pelo estudante. Um exemplo é uma cama, como mostrado na figura a seguir. Os alunos devem ter um bom referente para unidades simples e também múltiplos úteis de unidades padrão.

2. Usar "blocos menores" quando apropriado. A figura a seguir mostra um exemplo. Pode ser mais fácil estimar os blocos menores ao longo da parede do que estimar todo o comprimento. O peso de uma pilha de livros fica mais fácil se alguma estimativa for dada para um livro "médio".

3. Usar subdivisões. Esta é uma estratégia semelhante aos "blocos menores", com os blocos impostos ao objeto pelo estimador. Por exemplo, se o comprimento da parede a ser estimado não possui bloco útil, pode ser dividido mentalmente pela metade e então em quarto ou até mesmo um oitavo dividindo-o repetidas vezes até chegarmos a um comprimento mais manejável. Comprimentos, volumes e medidas de área, todos são adequados a essa técnica.

4. Iterar uma unidade mental ou fisicamente. Para comprimento, área e volume, às vezes é fácil separar unidades simples visualmente. Você pode usar suas mãos ou fazer marcas ou dobras para manter um registro enquanto está medindo. Para comprimentos, é especialmente útil usar uma medida corporal como uma unidade e iterar com ela. Por exemplo, se você sabe que seu passo largo tem cerca de 3/4 de metro, você pode caminhar um comprimento e, então, pode multiplicar para obter uma estimativa. As larguras da mão e dos dedos são úteis para medidas menores.



Estime o comprimento de uma sala. Use: janelas, quadros e espaços internos como "blocos" de medida. Use referências mentais: "Minha cama possui cerca de 7 pés de comprimento, eu poderia alinhar 3 camas aqui e talvez mais 2 pés. Digamos, então, um total de 23 pés". Fonte: Walle (2009, p. 428)

Note que os conceitos sugeridos por Clements e Stephan (2004) também são essenciais no processo de estimativas de medidas.

Observe que neste segundo ano, apesar de os termos litro e mililitro, gramas e quilogramas aparecerem, estes não devem ser as ideias de múltiplos e submúltiplos das unidades de medidas. Apenas as terminologias devem ser exploradas para o desenvolvimento da ideia de unidade de medida.

Analise estas situações e perceba o contexto.

Walle (2009, p. 428) sugere duas tarefas que contemplam esse contexto.

Estimativa rápida

Selecione um único objeto. Pode ser uma caixa, uma melancia, um jarro ou até mesmo a diretora da escola. A cada dia, selecione um atributo ou dimensão diferente a ser estimado pela turma. Para uma melancia, por exemplo, os alunos podem estimar seu comprimento, largura, peso, volume e área de superfície.

Estimativa: caçada às medidas

Organize caçadas às medidas. Dê às equipes uma lista de medidas e peça que elas tentem encontrar coisas que estejam bem próximas dessas medidas. Não permita nenhum instrumento de medida. Uma lista poderia incluir os seguintes artigos:

- Um comprimento de 3,5 m.
- Algo que pese mais de 1 kg e menos de 2 kg.
- Um recipiente que contenha cerca de 200 ml.

Deixe os alunos sugerirem como julgar a precisão dos resultados.

Das habilidades presentes no **Terceiro ano**, duas delas colocam foco nas unidades de medida, mas especificam apenas as grandezas comprimento, tempo e capacidade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Significado de medida e de unidade de medida.	(EF03MA17) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada.
Significado de medida e de unidade de medida.	(EF03MA18) Escolher a unidade de medida e o instrumento mais apropriado para medições de comprimento, tempo e capacidade.

É interessante observar que iniciar pela medida de comprimento parece ser mais adequado, dada sua simplicidade. Analise as próximas situações e perceba o contexto.

Em Brasil (2007, p. 19), há uma proposta de tarefa que, ao ser feita por grupos de alunos e complementada com a devida problematização (eliminando a explícita indução nela presente), permite discussões e posterior síntese das ideias, conceitos e procedimentos inerentes e subjacentes a essas duas habilidades.

Conteúdo: Situação de comparação em medidas de comprimento

Na aula passada, nós vimos que nem sempre é possível comparar dois objetos apenas pela observação. Se não podemos colocá-los lado a lado, o que podemos usar para medir? Vamos saber a resposta nesta aula.

Atividade 1

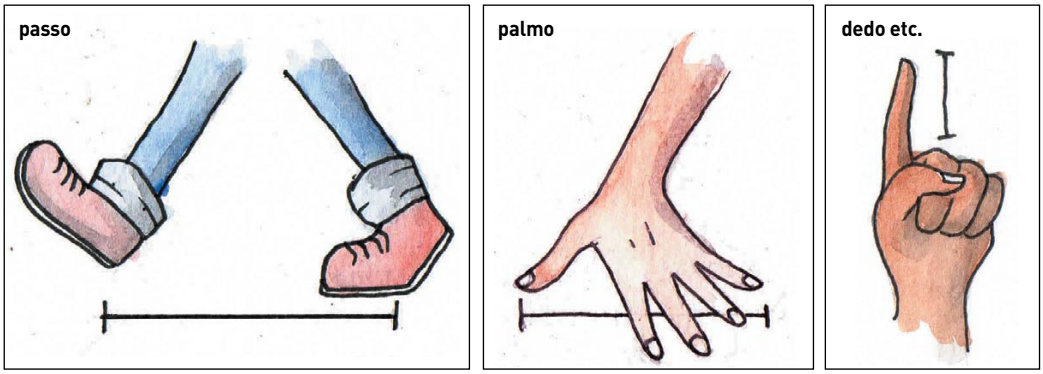
Vamos imaginar que não temos nenhum instrumento de medida disponível. Converse com seu grupo e escreva como você resolveria cada situação.

a) Queremos saber qual das salas da nossa escola é a mais comprida. Como você faria para saber?

b) Queremos saber se as mesas das professoras, nas salas de aula, têm o mesmo comprimento. Como você faria para saber?

c) Também queremos saber se a altura do rodapé da nossa sala é a mesma da do rodapé da sala vizinha. Como você faria nesse caso?

Você já deve ter notado que, se não tivermos como comparar dois objetos diretamente (colocando um ao lado do outro), precisamos de um terceiro que será nosso instrumento para medir. Um modo de fazer isso é usar partes do nosso próprio corpo. Vamos ver como se faz?



Atividade 2

Junto com seu grupo, pense e responda:

a) Qual parte do corpo você usaria para medir a altura da mesa?

b) Qual parte do corpo você usaria para medir o comprimento do seu lápis?

c) Qual parte do corpo você usaria para medir a largura da rua onde você mora?

Atividade 3

Use a largura de seu dedo polegar como unidade de medida e meça:

a) O comprimento de sua carteira.

b) O comprimento desta página.

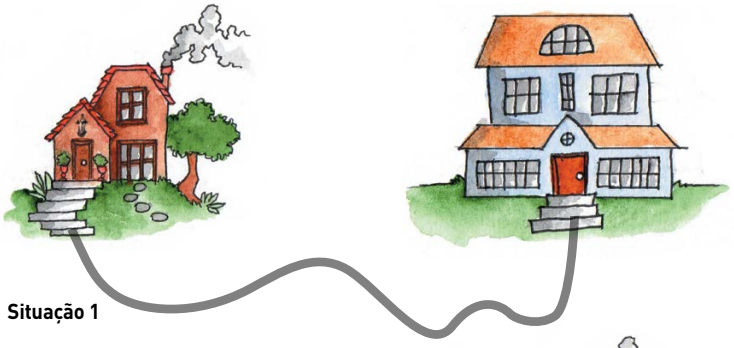
c) Compare os números obtidos com os de seus colegas de grupo: houve medidas diferentes? Por que isso aconteceu?

Atividade 4

Utilize o comprimento de seu pé para medir o comprimento da sala de aula. Compare sua resposta com a de seus colegas de grupo. Como você explica as diferenças encontradas nas respostas?

Atividade 5

Observe as figuras a seguir. Queremos medir o comprimento do caminho entre as duas casas, em cada situação. Em qual caso é mais fácil medir? Como você faria em cada caso?



Situação 1

Situação 2

Atividade 6

Observe o quadro a seguir e relacione a unidade de medida (coluna direita) mais apropriada para aquilo que queremos medir (coluna esquerda).

O QUE MEDIR	UNIDADE DE MEDIDA
☐ Comprimento da mesa da professora	1) Cabo de vassoura
☐ Altura da sala	2) Palmos
☐ Comprimento do meu lápis	3) Palitos de fósforo
☐ Largura da quadra da escola	
☐ Profundidade de uma piscina	

Atividade 7

Você e todos os seus colegas do grupo receberam um pedaço de barbante. Verifique se os barbantes têm todos o mesmo tamanho. Com o seu palmo, meça o barbante e faça o registro. Nesse barbante posso contar _____ dos meus palmos.

a) A medida que você obteve é a mesma da obtida por seus colegas? Discuta com seu grupo por que você acha que isso aconteceu. (Aqui vai uma dica: compare o tamanho de sua mão com o das mãos dos seus colegas).

b) Escreva por que os números obtidos são diferentes.

c) Então, responda: por que será que alguns alunos obtiveram a mesma resposta?

d) Se todos os alunos medissem o comprimento da sala de aula com esse pedaço de barbante, obteriam o mesmo número? Explique por quê.

Nesta fase, o discernimento entre unidades de medidas padronizadas e não padronizadas, convencionais e não convencionais, pode trazer discussões interessantes, que incluem os aspectos das culturas locais.

A terceira e última habilidade relacionada neste **Terceiro ano** de escolarização tem dois aspectos delicados para serem tratados conceitualmente, que residem no discernimento entre massa e peso e na relação entre capacidade (volume) e massa. Ambos os aspectos estão inevitavelmente presentes nas tarefas desenvolvidas nos anos iniciais de escolarização, dada a indissociabilidade existente entre as três grandezas: massa, peso e capacidade (volume).

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de capacidade e de massa (unidades não convencionais e convencionais): registro, estimativas e comparações.	(EF03MA20) Estimar e medir capacidade e massa, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (litro, mililitro, quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros.

No que se refere à relação entre as grandezas massa e peso, em geral, nos anos iniciais, as massas de diferentes corpos são comparadas por meio de experimentos que usam balanças de dois pratos, quando se percebe que um corpo é mais "pesado" que outro. Outra prática presente, sobretudo na fase inicial do desenvolvimento do conceito da massa como grandeza, é aquela que permite às crianças compararem as massas de objetos em função de sua capacidade de carregá-los.

Ambos os exemplos podem induzir à sobreposição conceitual, comumente presente nas práticas cotidianas, entre massa e peso, que são grandezas distintas.

> *Ainda que um mesmo objeto situado em diferentes pontos da superfície da Terra tenha, aproximadamente, o mesmo peso e a mesma massa (fato este que, provavelmente, gerou e reforça a crença equivocada de que peso e massa constituiriam grandezas de mesma natureza e que, portanto, unidades de massa são empregadas como unidades de peso), seria desejável que a escola discutisse junto aos alunos as razões pelas quais isso acontece. O que ocorre é que, sendo a massa de um objeto uma grandeza invariável e escalar (isto é, que possui apenas intensidade, mas nem direção e nem sentido), e sendo o peso de um objeto uma grandeza vetorial (isto é, dotada de intensidade, direção e sentido), obtido pela multiplicação da massa do objeto pela aceleração da gravidade, conclui-se que é a aceleração da gravidade que não permanece constante para todos os pontos da Terra, ou seja, ela varia proporcionalmente ao quadrado da distância em que o corpo se encontra em relação ao centro da Terra. Seria um momento apropriado para se mobilizar cultura matemática e cultura científica (Física) conjuntamente, fazendo-se com que tais objetos de uma e outra cultura se esclarecessem mutuamente. (MOURA et al, 2008, p. 157)*

Na mesma linha de pensamento, Walle (2009) observa que

> *o peso é uma medida do puxão ou força gravitacional da Terra sobre um objeto. A massa é a quantidade de matéria em um objeto e uma medida da força necessária para acelerar seu movimento. Na Lua, onde a força gravitacional é muito menor do que na Terra, um objeto tem um peso menor, mas a sua massa é idêntica à na Terra. Para propósitos práticos, na Terra, as medidas de massa e peso serão consideradas aproximadamente a mesma (por serem proporcionais). Nessa discussão, os termos peso e massa serão usados de modo intercambiável. (WALLE, 2009, p. 419)*

Então, com base nessas duas referências, devemos ter claro que a massa de um objeto é, geralmente, uma grandeza cuja medição é feita de maneira indireta, uma vez que ela é diretamente proporcional ao seu peso. Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

Construa a balança de dois pratos como mostra a figura a seguir, usando um cabide e dois vasos suspensos, e faça duas experimentações.

a) Na primeira, encontre um pedaço de ferro e um de madeira com as mesmas dimensões e, em seguida, coloque cada um deles em um dos pratos. Descreva o que você observa e a que conclusões chegou.

b) Na segunda, coloque uma pequena pedra e, em seguida, a quantidade de lápis necessária para que a balança fique em equilíbrio. Descreva o que você observa e a que conclusões chegou.

No primeiro experimento, os alunos poderão facilmente concluir aquilo que eles já observam com as mãos: o pedaço de ferro é mais pesado que o de madeira. Ou seja, a massa do ferro é maior que a de madeira, dado que ambos têm o mesmo volume.

No segundo experimento, os alunos poderão observar que o volume de lápis necessário para equilibrar a balança é muito maior que o da pedra.

Geralmente, ambas as observações geram estranhamento nos alunos. Tais estranhamentos são solucionados apenas com a incorporação, na discussão, das grandezas aceleração da gravidade e força, sendo que esta segunda, de maneira específica, a força peso.

Outros experimentos que ajudam no entendimento da propriedade da massa, dirigidos a alunos dos anos iniciais, é a discussão da densidade. Um exemplo consiste na colocação dos mesmos pedaços de ferro e de madeira usados na balança em um recipiente transparente com água.

Observe que nestas propostas a aula de Matemática se confunde com uma aula de Ciências. Essa sobreposição é desejável para a atribuição de significado ao que se estuda.

A incorporação de experimentos semelhantes a esse nas práticas de ensino de medição de massa propicia a superação do primeiro aspecto subjacente à habilidade EF03MA20 e ao objeto de conhecimento a ela associado, que é o discernimento entre massa e peso.

Essa incorporação permite também a discussão do segundo aspecto subjacente, que é a relação entre as grandezas massa e capacidade (volume) presente nessa habilidade. Este segundo aspecto, com um maior critério, deveria ser redigido como relação entre massa e volume.

> *A diferença entre o volume e capacidade da embalagem é que ao determinar o volume (produto entre as medidas externas do sólido) tem-se a medida que o sólido ocupa no espaço; e determinando o volume interno, tem-se a capacidade. (BIEMBENGUT e HEIN, 2002, p. 43).*

Na mesma perspectiva,

> *O termo volume é usado para designar a característica que todos os corpos têm de ocupar um espaço. [...] Se usa o termo capacidade para designar a qualidade de certos objetos (recipientes) de conter líquidos ou materiais soltos (areia, cereais etc.). Na realidade, não se trata de uma grandeza dissociada do volume: a capacidade de um recipiente coincide com o volume do seu espaço interior delimitado pelas paredes do recipiente ou vice-versa, o volume de um corpo coincide com a capacidade de um recipiente que envolveria completamente o dito corpo. (GODINO; BATANERO; ROA; 2002, p. 622)*

Dito de outra forma, enquanto o volume é a grandeza que permite medir o espaço tridimensional ocupado por um objeto, a capacidade é o espaço tridimensional que pode ser preenchido no interior de um recipiente ou, ainda, o espaço tridimensional existente no interior de uma forma geométrica tridimensional.

Do mesmo modo que não faz sentido planificar um sólido geométrico, também não faz sentido falar na capacidade dele. A planificação e a capacidade podem ser associadas apenas a formas geométricas espaciais (tridimensionais).

Corrobora com essa ideia – de associar a massa mais à grandeza volume do que à grandeza capacidade – a definição dada à densidade, que é outra grandeza derivada dessas duas. Na química, o conceito de densidade é construído a partir da razão entre a quantidade de massa de um objeto contida em um determinado volume por ele ocupado.

As duas outras habilidades, especificadas no **Quarto** e **Quinto anos** de escolarização remetem ao aprimoramento do trabalho com grandezas e medidas envolvendo as estimativas e elaboração e resolução de problemas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.

O desenvolvimento dessas duas habilidades permite o estabelecimento de conexões entre as práticas escolares e a realidade vivida pelos alunos. Para tanto, é necessário que

> *as crianças sejam incentivadas a realizarem efetivamente vários tipos de medições, tais como: medir com régua graduada e outros instrumentos a distância entre dois pontos numa folha de papel, bem como o comprimento de segmentos de reta que constituem lados de figuras planas ou arestas de figuras não-planas; medir com barbantes, fitas métricas, trenas etc. a distância entre dois pontos acessíveis do espaço físico real; medir, através de técnicas adequadas, a massa, a capacidade e o volume de objetos; medir a superfície de figuras planas, de partes de figuras não-planas e de partes de objetos concretos situados no espaço real; medir sombras de uma estaca cravada perpendicularmente ao solo em vários momentos do dia; medir a altura e o azimute do Sol; medir o tempo transcorrido para a realização de um evento etc. (MOURA et al., 2008, p. 163).*

Para finalizar esta subseção, é importante destacar que toda problematização do contexto que resulta em problemas que permitem atribuir significado ao conhecimento matemático construído deve convergir para a determinação de três elementos inerentes à medida: escolha de uma unidade de medida; comparação dessa unidade de medida com a grandeza a ser medida e a expressão numérica resultante dessa comparação.

4.2. Medição associada às formas geométricas

Essa habilidade, proposta para o **Segundo ano**, não traz elementos novos em relação ao que já foi discutido anteriormente.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medida de comprimento: unidades não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro).	(EF02MA16) Estimar, medir e comparar comprimentos de lados de salas (incluindo contorno) e de polígonos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro) e instrumentos adequados.

Já a habilidade EF03MA21, especificada no **Terceiro ano**, traz o desenvolvimento da ideia de área com o procedimento de superposição. A área é a grandeza que permite medir o tamanho de um espaço bidimensional, ou seja, uma superfície.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Comparação de áreas por superposição.	(EF03MA21) Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.

Segundo Miguel e Miorim (1986), a abordagem inicial para verificar como uma mesma superfície pode se transformar em outra com a mesma área não é um processo fácil para os alunos entenderem, pois o "desenvolvimento mental dos alunos passa por certos estágios, durante os quais o seu pensamento se prende a certas ilusões perceptivas relacionadas com o conceito de área de uma superfície". (MIGUEL, MIORIM, 1986, p. 99)

Segundo esses autores, os alunos reconhecerão que duas diferentes superfícies terão o mesmo tamanho, ou seja, a mesma área, em pelo menos uma das seguintes situações:

a) É possível sobrepor exatamente uma sobre a outra pela simples mudança de posição de uma delas, isto é, por meio de simples movimentos de rotação, translação ou combinação de ambos.

b) Exista pelo menos uma maneira de cortar uma delas num certo número de partes (iguais ou não) que, dispostas de outra forma, sem superposição de partes, cobrem exatamente a outra superfície.

Nesse sentido, Walle (2009) indica que

> *Um dos propósitos das atividades de comparação com áreas é ajudar os alunos a distinguir entre tamanho (ou área) e forma, comprimento e outras dimensões. Um longo e fino retângulo pode ter menos área do que um triângulo com lados menores. Esse é um conceito especialmente difícil para crianças mais jovens compreenderem. Os experimentos piagetianos indicam que muitas crianças de 8 ou 9 anos não compreendem que reorganizar áreas em formas diferentes não afeta a quantidade de área (p. 412).*

Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

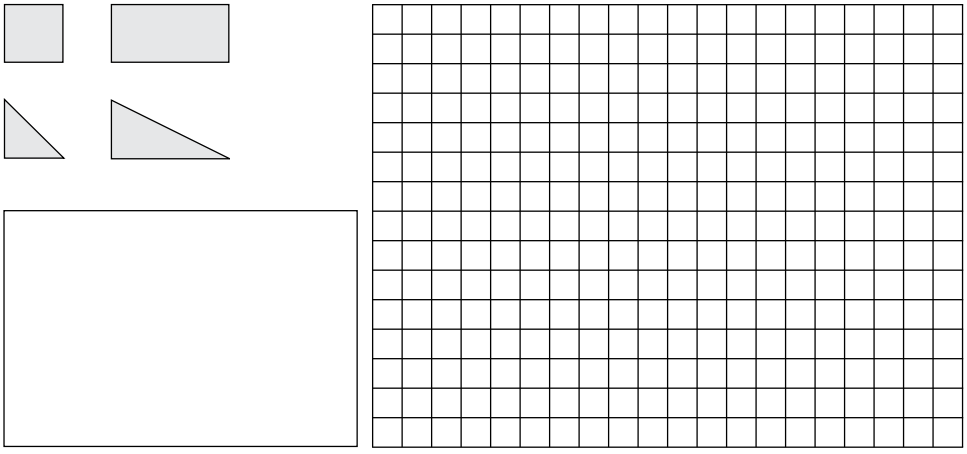
Ladrilhando

Objetivo

Recobrir uma superfície com diferentes tipos de ladrilhos.

Material necessário

Uma régua e uma folha com a malha pontilhada para cada aluno.



Desenvolvimento

Divida a classe em grupos de quatro alunos e entregue a cada aluno uma folha como a apresentada anteriormente. A proposta é:

1. Cada um deles vai escolher uma das figuras que se encontram no alto da folha.
2. Feito isso, cada aluno irá reproduzir a figura que escolheu tantas vezes quantas for necessário para recobrir o retângulo que se encontra na parte inferior esquerda da folha. As figuras devem ser reproduzidas sobre o quadriculado.

Dê um tempo para a realização da tarefa e levante as seguintes questões:

- Em todos os ladrilhamentos foi utilizada a mesma quantidade de ladrilhos?
- Quem utilizou menor quantidade de ladrilhos?
- E quem utilizou a maior quantidade?
- Por que foi utilizada a mesma quantidade de quadrados e de triângulos maiores?
- Do que dependeu a quantidade de ladrilhos a serem utilizados: do seu tamanho ou da sua forma?
- Para recobrir uma superfície, só podemos usar ladrilhos quadrados, retangulares ou triangulares ou com outras formas também é possível?

Meta

Desenvolver a noção de área por recobrimento.

Comentários

Propiciar condições para a introdução do conceito de área. Fonte: SÃO PAULO (1985b)

A habilidade EF04MA21 traz como incremento o uso de malhas quadriculadas e a questão das contagens.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

Em geral, as práticas de ensino associadas a essa habilidade restringem o uso de figuras planas aos polígonos, ou seja, limitam a medição ou a estimativa da área a figuras cujos contornos são segmentos de retas, perdendo assim a oportunidade de discussões que podem aprofundar o desenvolvimento do conceito de área. Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

Aproximando

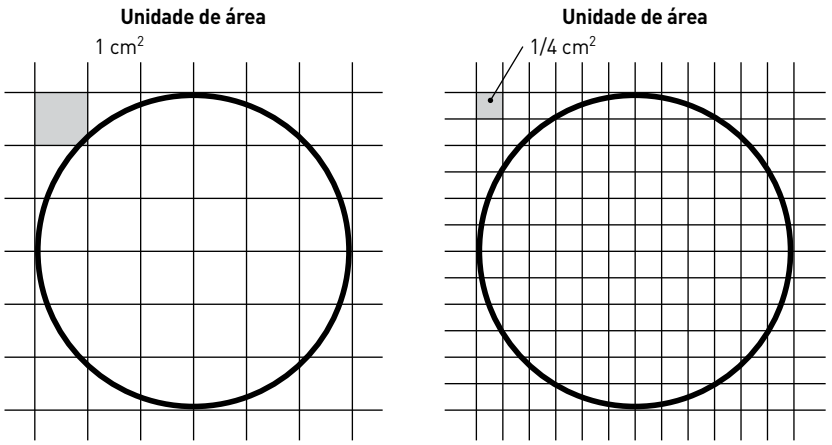
Objetivo

Determinar, por aproximação, a área de uma figura plana qualquer.

Material necessário

Uma régua e uma folha com a malha quadriculada para cada aluno.

Figura 1



Desenvolvimento

Distribua uma folha quadriculada para cada aluno.

1ª Parte

Usando o centímetro quadrado (cm^2) como unidade de área, o aluno deverá indicar a área da superfície da Figura 1 (círculo). O aluno perceberá, claro, que o número a ser encontrado é uma estimativa.

Faça um levantamento, na lousa, dos números encontrados pelos alunos e proponha as questões:

a) Será que é possível, dos números levantados, apostar no número mais provável que representa a área?

b) Quais seriam os menos prováveis? É possível eliminar alguns números?

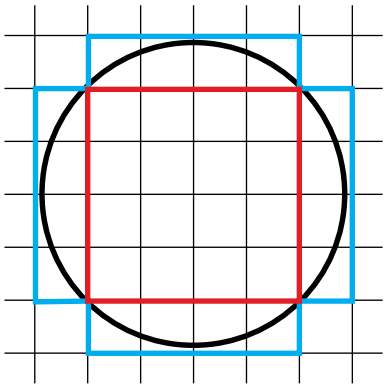
Para responder a essas questões, sugira o trabalho:

1) Contornar com o lápis as unidades de área (quadrados de 1 cm^2) que cabem totalmente no interior da figura. Contar esses quadrados. Colocar, em seguida, para os alunos: o número de unidades encontradas é menor, maior ou igual à área da figura?

2) Na mesma figura, desenhe um polígono que contenha os quadrados suficientes para cobrir toda a figura. Após a contagem dos quadrados, pergunte: o número de unidades encontradas é menor, maior ou igual à área da figura?

Os alunos deverão perceber que a medida exata da superfície é um número maior que o encontrado em (1) e um número menor que o obtido em (2). Em seguida, eles podem assinalar, entre os números anteriormente levantados, aqueles que estão neste intervalo, ou seja, os números que melhor podem representar a área da região.

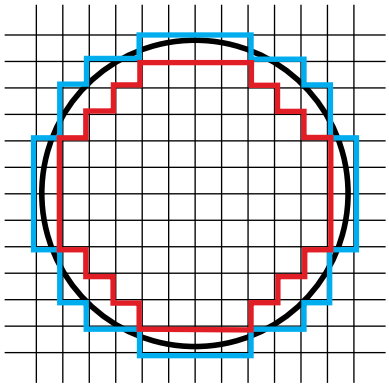
Assim, a área do círculo é um número maior que 16 cm^2, pois no seu interior cabem 16 quadrados de 1 cm^2; e menor que 32 cm^2, pois para recobrir todo o círculo são suficientes 32 quadrados de 1 cm^2.



Em seguida, o aluno deverá determinar o intervalo em que se encontra o número que representa a área do círculo, utilizando, agora como unidade de área, um quadradinho de ¼ do cm^2. Para determinar tal intervalo, o aluno contará:

1) O maior número de quadradinhos que cabem na região.

2) O menor número de quadradinhos para cobrir toda a região.



Depois que os alunos acharem esses números, discuta com eles o fato: os números encontrados representam quartos de cm^2, e para determinar o número de cm^2 é necessário dividir esses números por quatro.

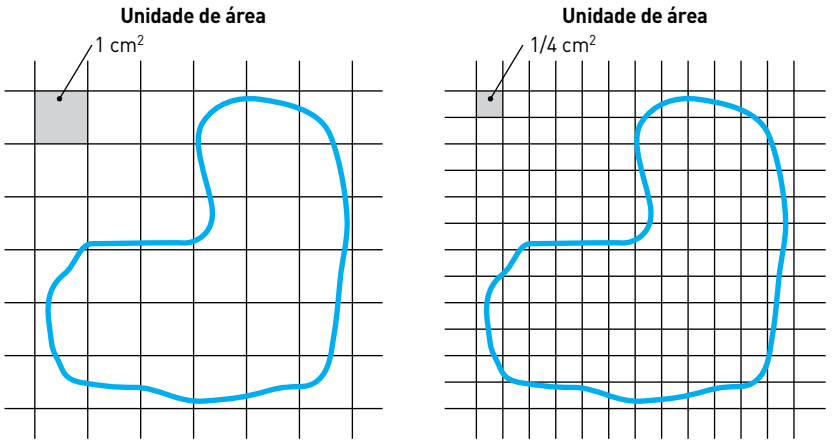
Assim, ao contar o número de quadradinhos de ¼ de cm^2 que cabem no interior do círculo o aluno provavelmente encontrará 76 e concluirá que a área do círculo é maior que 19 cm^2, pois 76 : 4 = 19. E ao contar o menor número de quadradinhos de ¼ de cm^2 que recobrem toda a região o aluno encontrará 112, concluindo que área do círculo é menor que 28 cm^2, pois 112 : 4 = 28.

É importante o aluno perceber que quanto menor for a unidade de área utilizada para determinar a área, melhor é a aproximação obtida.

2ª Parte

A tarefa agora é determinar a área da Figura 2 utilizando o mesmo procedimento utilizado no círculo.

Figura 2



Meta

Desenvolver a noção de medida de área em figuras não poligonais.

Comentários

Propiciar condições para que se perceba que quanto menor for a unidade utilizada para determinar a área de uma figura plana qualquer, melhor será a aproximação conseguida. Fonte: SÃO PAULO - 1985c)

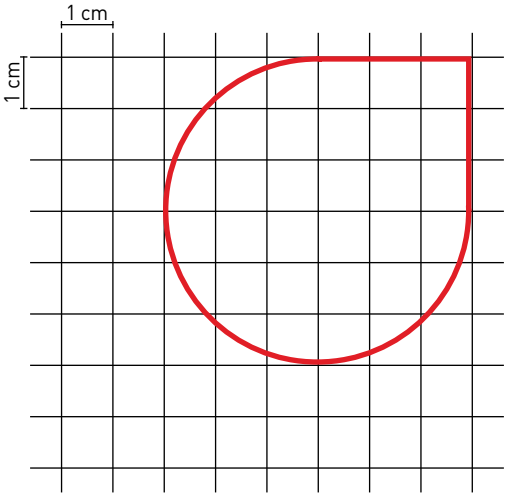
A habilidade EF05MA20 traz um reducionismo na relação conceitual, de modo que pesquisas e avaliações externas explicitam ser esta uma das maiores dificuldades dos alunos: a diferenciação entre perímetro e área. Diversas pesquisas (BALDINI, 2004; ANDRADE, 2007; SANTOS, 2014) mostram que essa confusão se mantém ao longo de todo processo de escolarização.

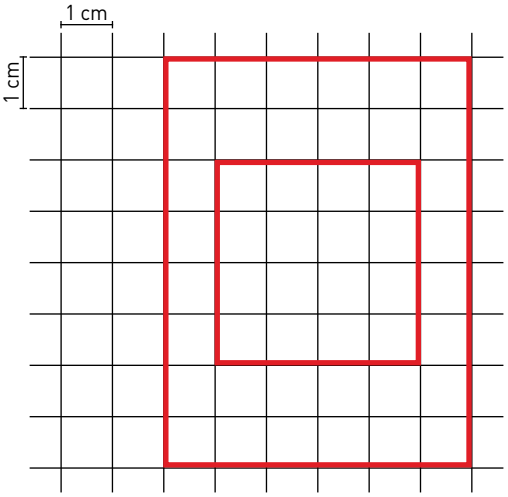
O reducionismo está presente na habilidade por se limitar ao tratamento de perímetro e área de figuras poligonais. A questão central aqui é: o que é perímetro?

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações.	(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

Esse reducionismo presente na habilidade também não permite a desconstrução do conceito de que perímetro é a soma da medida dos lados. Não que esta definição esteja errada, mas ela se limita apenas para polígonos. Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

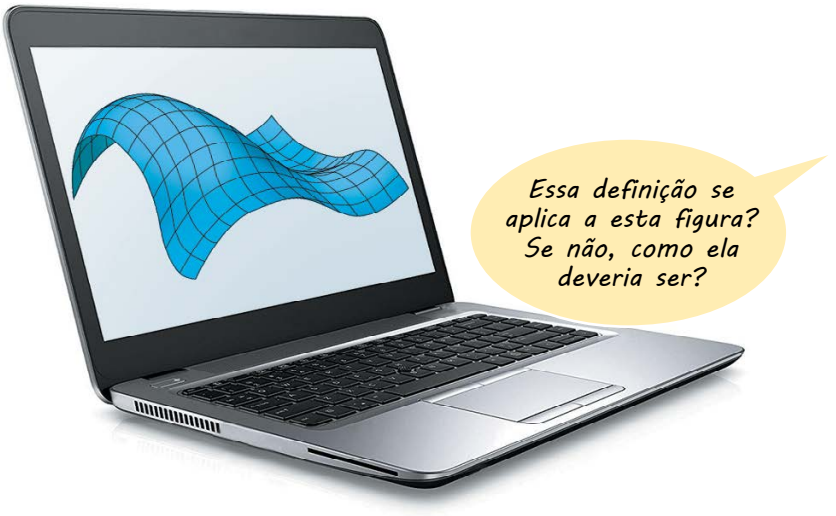
Qual é o perímetro das figuras abaixo?





Como pode ser constatado, a definição de que perímetro é a soma das medidas dos lados não é suficiente para resolver a tarefa apresentada anteriormente. Situações como essa são muito frequentes nos livros didáticos e até mesmo em documentos curriculares de toda natureza.

Considerando essa última figura, uma resposta mais elaborada, e provavelmente mais adequada, para a pergunta "O que é perímetro?" poderia ser "Perímetro é o comprimento do contorno de uma figura plana", uma vez que ela seria suficiente para todas as figuras planas, poligonais ou não.



Por fim, a habilidade EF05MA21 retoma a discussão sobre volume, agora devidamente associada a sólidos geométricos.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Noção de volume.	(EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

Essas problematizações foram feitas para evidenciar que conceitos tratados na relação perímetro e área, comprimento, área e volume, não são tão triviais quanto as práticas de ensino normalmente sugerem ser.

4.3. Medição de tempo

Nesta subseção, na qual as habilidades relacionadas ao tempo foram selecionadas para análise, será feita uma subdivisão diferente em relação às anteriores. Esta subdivisão tem com critério um possível significado e uso dado ao tempo, inerente a cada uma das habilidades: o tempo como o registro do momento (o instante) e o tempo enquanto duração (intervalo de tempo), sendo que este segundo é passível de ser mensurado.

Segundo Godino, Batanero e Roa (2002)

> *As crianças não entendem o tempo e sua passagem até atingirem os níveis superiores do Ensino Fundamental. Mesmo assim, muitas crianças têm um entendimento fraco da passagem do tempo e quase nenhuma concepção do tempo histórico. A percepção do tempo como um atributo mensurável progride ao longo dos anos escolares. (p. 622)*

A medição de tempo também tem uma particularidade em relação às demais medições, pois ela não é atributo de um objeto a ser comparado a outro, mas sim uma construção social realizada ao longo da história da Humanidade. As questões relacionadas ao tempo estão sempre associadas às práticas sociais, geralmente negligenciadas nas práticas escolares: observação astronômica, controle do tempo para o manuseio agrícola, deslocamento para diferentes espaços territoriais devido a condições climáticas e de alimentação, orientação náutica, aeronáutica e terrestre, práticas místicas e religiosas, culinária, práticas financeiras etc.

Quando observada essa negligência, um ato matemático é feito de maneira subliminar e não é percebido. O tempo é uma grandeza contínua e passa a ser tratada de forma discretizada. Em geral, o tempo é subdividido em séculos, anos, meses, semanas, dias, horas, minutos e segundos.

Nas práticas escolares, esse processo de discretização, presente na sociedade e reproduzido na escola, tem muitas conexões que precisam ser devidamente trabalhadas para que tenham significado. Tal atribuição de significado não ocorrerá se as práticas escolares não estiverem associadas à vida dos alunos, de maneira contemporânea, problematizando a vida no passado ou projetando a do futuro.

Ao considerar a perspectiva histórica da apropriação do tempo, de sua passagem e sua medição, as crianças poderão perceber que tal apropriação interfere inclusive nos avanços tecnológicos presentes para a medição do tempo. Analise as situações a seguir e perceba o contexto.

Fonte: Brasil (2014, p. 54)

Como exemplo das principais conexões relacionadas à discretização do tempo estão a relação entre o sistema romano e o hindo-arábico, o sistema sexagesimal de origem babilônica (estamos acostumados ao sistema decimal) e a relação entre o tempo e a Astronomia (o ano é o tempo que a Terra gira em torno do Sol e as estações do ano são uma medida de tempo), o ângulo de rotação da Terra em relação ao Sol, as fases da Lua (muito importante em diversos aspectos culturais), o dia como o tempo de rotação da Terra em torno de seu eixo.

É importante salientar que, sem essas discussões, não é possível entender a importância do ano bissexto, a origem do Carnaval e que o calendário que nos orienta hoje nem sempre existiu. O Calendário Gregoriano (atual) foi promulgado pelo Papa Gregório em 1582, substituindo o Calendário Juliano, interposto por Júlio Cesar em 46 A.C. O mais antigo dos calendários conhecido é egípcio, datado de 500 A.C., que já contava com 365 dias.

A origem e evolução de nosso calendário

O dia solar verdadeiro, intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano local, varia entre 23h59min39s e 24h00min30s. Essas variações, devidas às desigualdades que afetam a ascensão reta do Sol, nos obrigam a utilizar um dia civil, com a duração de 24 horas. Este dia, definido em função do dia solar médio, começa à meia-noite e termina à meia-noite seguinte.

A lunação, intervalo de tempo entre duas conjunções consecutivas da Lua com o Sol, também não é um valor constante, mas varia entre 29 dias e 6 horas e 29 dias e 20 horas. O seu valor médio, conhecido com grande precisão, é de 29d12h44min02,8s. A revolução sinódica da Lua está na origem dos calendários lunares, em que os meses têm alternadamente 29 e 30 dias. O seu valor médio é, portanto, de 29,5 dias, diferindo 44min do mês sinódico.

Em Astronomia são consideradas várias espécies de ano. Iremos nos referir apenas ao ano sideral e ao ano trópico.

- O ano sideral, duração da revolução da Terra em torno do Sol, é igual a 365d06h09min09,8s. É este ano que intervém na terceira lei de Kepler da mecânica celeste, ao ligar as durações das revoluções dos planetas com os eixos maiores das órbitas.
- O ano trópico, tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol médio pelo ponto vernal, é atualmente de 365d05h48min45,3s. É mais curto do que o ano sideral, devido à precessão dos equinócios, que faz retrogradar o ponto vernal de 50,24 segundos de arco por ano. É o ano trópico que regula o retorno das estações e que intervém nos calendários solares.

Há ainda os calendários luni-solares, que procuram harmonizar as lunações com a revolução trópica do Sol.

O protótipo atual de calendário lunar é o calendário islâmico; do calendário solar é o calendário gregoriano; do calendário luni-solar é o calendário israelita. Mas também o calendário gregoriano conserva, de certo modo, uma base luni-solar no que diz respeito às regras para a determinação da data da Páscoa, a que procuraremos mais adiante fazer referência.

Outro período de tempo utilizado nos calendários é a semana de sete dias, cuja origem se desconhece. É provável que estivesse relacionada com o mês lunar, visto que sete dias são aproximadamente um quarto de lunação (intervalo aproximado entre a Lua cheia e o quarto minguante) ou talvez com o número dos sete astros principais do firmamento (os cinco planetas conhecidos na Antiguidade mais o Sol e a Lua). Mas é provável que a escolha de um intervalo de sete dias se deva ao caráter sagrado do número sete entre os judeus. Seja como for, o ciclo semanal de sete dias se propagou inicialmente para o Oriente e mais tarde chegou ao Ocidente, encontrando-se hoje praticamente incorporado em todos os calendários como ciclo regulador das atividades laborais.

Fonte: MARQUES, Manuel Nunes. Origem e evolução do nosso calendário. 2012.
Disponível em: < http://rotasul.net/folhinha/calendarios/marques.pdf>
Acesso em: 23/05/2020.

Por tudo isso, o tempo é "diferente dos outros atributos que são comumente medidos na escola, porque não pode ser visto nem pode ser sentido e porque é mais difícil para os alunos compreenderem unidades de tempo ou como elas são emparelhadas contra um determinado período, duração ou intervalo de tempo" (WALLE, 2009, p. 420). Analise a situação a seguir e perceba o contexto.

Sugestões de prática para o registro do tempo dadas por Godino, Batanero e Roa (2002):

1) Use qualquer oportunidade para desenvolver a ideia dos descritores de tempo: a aula começa pela manhã; a comida separa a manhã da tarde; os meninos voltam para casa à tarde. O uso da linguagem temporária será uma parte contínua do ensino fundamental.

2) Mesmo que as crianças não consigam ler ou saber as horas, aponte as diferenças na posição dos ponteiros do relógio. Desenhe a posição dos ponteiros do relógio em um determinado horário, seguido de outro desenho uma hora depois. Se for difícil planejar isso na sala de aula, coloque um relógio no quadro e peça a uma criança que coloque os ponteiros conforme indicado pelo relógio da sala. Desenhar vários relógios com horários diferentes ajudará as crianças a visualizarem a mudança que a passagem do tempo faz no mostrador do relógio.

3) Faça um registro dos dias, meses, datas e outros eventos do calendário. Nascimentos e ocasiões especiais ajudam a aumentar o interesse em ler datas, dias e meses. Observe a mudança de ano em que as crianças retornam à escola após as férias de Natal. Embora essas atividades não contribuam necessariamente ou diretamente para a percepção do tempo das crianças, elas as preparam para o vocabulário que usarão para expressá-lo. A passagem do tempo pode ser observada nos níveis mais altos em termos de dias, semanas e meses.

4) Medir o crescimento de um animal de estimação e associá-lo ao longo do tempo. Faça gráficos simples do peso e da altura do animal e relacione-os com os dias e datas de cada medição. Isso ajuda a relacionar a mudança nas características físicas do animal com a variação do tempo. Peça às crianças que prevejam o peso uma semana depois, para ganhar experiência adicional observando os intervalos de tempo. Eles podem então comparar sua previsão com o valor medido.

Fonte: Godino, Batanero e Roa (2002, p. 644)

Com essa ampliação, observe o quanto elas estão subjacentes às habilidades a seguir, que foram agrupadas pelo significado do tempo, como sendo um instante e o seu reconhecimento e registro.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de tempo: unidades de medida de tempo, suas relações e o uso do calendário.	(EF01MA16) Relatar em linguagem verbal ou não verbal sequência de acontecimentos relativos a um dia, utilizando, quando possível, os horários dos eventos.
Medidas de tempo: unidades de medida de tempo, suas relações e o uso do calendário.	(EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário.
Medidas de tempo: unidades de medida de tempo, suas relações e o uso do calendário.	(EF01MA18) Produzir a escrita de uma data, apresentando o dia, o mês e o ano, e indicar o dia da semana de uma data, consultando calendários.
Medidas de tempo: leitura de horas em relógios digitais e analógicos, duração de eventos e reconhecimento de relações entre unidades de medida de tempo.	(EF03MA23) Ler horas em relógios digitais e em relógios analógicos e reconhecer a relação entre hora e minutos e entre minutos e segundos.

Note que tais habilidades são predominantemente procedimentais e valorizam a discretização do tempo, a valorização do calendário e do relógio, a conversão das unidades de tempo e a leitura em relógios digitais e analógicos.

Perceba que essas habilidades também não explicitam qualquer conexão com a vida, preocupação constante existente nas habilidades relacionadas às outras grandezas e, também, na Geometria.

Esta outra subdivisão traz a questão do intervalo do tempo, devendo ser entendido como a duração de um evento desde o seu início até o seu final. A sua medição requer um cuidado especial, relacionado ao conceito de transitividade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de tempo: intervalo de tempo, uso do calendário, leitura de horas em relógios digitais e ordenação de datas.	(EF02MA18) Indicar a duração de intervalos de tempo entre duas datas, como dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, para planejamentos e organização de agenda.
Medidas de tempo: intervalo de tempo, uso do calendário, leitura de horas em relógios digitais e ordenação de datas.	(EF02MA19) Medir a duração de um intervalo de tempo por meio de relógio digital e registrar o horário do início e do fim do intervalo.
Medidas de tempo: leitura de horas em relógios digitais e analógicos, duração de eventos e reconhecimento de relações entre unidades de medida de tempo.	(EF03MA22) Ler e registrar medidas e intervalos de tempo, utilizando relógios (analógico e digital) para informar os horários de início e término de realização de uma atividade e sua duração.
Medidas de tempo: leitura de horas em relógios digitais e analógicos, duração de eventos e relações entre unidades de medida de tempo.	(EF04MA22) Ler e registrar medidas e intervalos de tempo em horas, minutos e segundos em situações relacionadas ao seu cotidiano, como informar os horários de início e término de realização de uma tarefa e sua duração.

Segundo Wall (2009),

> *Como para outros atributos, para os alunos compreenderem o atributo de tempo adequadamente, eles devem fazer comparações de eventos que têm durações diferentes. Se dois eventos começarem ao mesmo tempo, o de duração menor terminará primeiro e o outro durará mais tempo. Por exemplo, que pião gira mais tempo? Porém, essa forma de comparação enfoca o fim do intervalo em vez do próprio intervalo de tempo. Para pensar no tempo como algo que pode ser medido, é útil comparar dois eventos que não comecem ao mesmo tempo. Isso requer que alguma forma de medida de tempo seja usada desde o princípio (p. 420).*

Analise a situação a seguir e perceba o contexto.

Sugestões de prática para a comparação do tempo dadas por Godino, Batanero e Roa (2002):

1) Dê às crianças uma noção da passagem do tempo relacionando-a com o calendário, lendo e observando os eventos naturais diários. O Sol brilhou hoje? Que data é hoje? Use essas perguntas diariamente e marque-as no calendário. Quantos dias o Sol brilhou esta semana? Essas e outras perguntas podem servir para estimular discussões normais sobre a duração do dia e da semana. Amplie a ideia para desenvolver conceitos comparativos de mês, estação do ano e ano. Crianças de níveis mais altos precisam dessas comparações; as crianças mais novas podem começar nelas.

2) Quanto tempo é um segundo? Um minuto? Uma hora? Quais são os intervalos de tempo mais longos? Essas perguntas podem ser respondidas com experimentos simples ou por observações. Um pêndulo cujo período é de aproximadamente um segundo. O pulso de uma pessoa, de 60 a 80 batimentos em um minuto. Meça o pulso das crianças ou deixe-as individualmente. Em seguida, compare a duração das pulsações das crianças com as obtidas imediatamente após o recesso. Pergunte às crianças que têm 60 batidas, isso leva cerca de 1 minuto. Faça-os ver que são 60 batidas. Ajudado por um cronômetro, para controlar o ritmo, conte 60 pulsos. Deixe-os ver que isso leva cerca de um minuto. Compare o pêndulo com o pulso para dar à criança uma ideia de que cerca de 60 batidas é igual a um minuto.

Fonte: Godino, Batanero e Roa (2002, p. 644)

Outro aspecto importante está relacionado à objetividade e subjetividade do tempo. Moura et al. (2008), para exemplificar essa subjetividade na comparação do tempo, citam que no contexto de um jogo de futebol "para o time que está perdendo a partida, a duração de 1 minuto é pouco tempo, ao passo que, para o time em vantagem, a duração de 1 minuto é muito tempo".

Segundo esses autores, é necessário que as práticas escolares

> *mobilizem o tempo como um objeto cultural; mobilizem a discretização do tempo como sendo uma prática cultural convencional e variável segundo diferentes contextos temporais e geopolíticos; distingam o tempo objetivo do tempo subjetivo, bem como problematizem outras formas de contar ou discretizar o tempo, tal como, por exemplo, aquela produzida pelos maias; problematizem os significados das palavras "ano", "mês", "semana", "dia" em vários "jogos de linguagem"; estimulem a construir ou a explorar os artefatos tecnológicos construídos ao longo da história para realizar a medição do tempo. (MOURA et al., 2008, p. 163)*

Analise a situação a seguir e perceba o contexto.

Observe as figuras 1 e 2:

Figura 1

Figura 2

a) Que horas o relógio da Figura 1 está marcando?

b) Passados 30 minutos, se estiver funcionando normalmente, que horas o relógio da Figura 1 deverá marcar?

c) Após 1 minuto do tempo que está sendo marcado pelo relógio da Figura 1, deverá acabar um jogo de futebol, no qual o time dos camisas brancas está perdendo de 1 a zero para o time dos camisas vermelhas. Se você é torcedor dos camisas vermelhas, o que pode significar esse tempo? Explique sua resposta.

d) Na Figura 2, você vê uma ilustração inspirada na obra "Relógios Moles", do artista espanhol surrealista Salvador Dali, autor dos famosos "relógios derretidos". O que significa esse "relógio derretido" para você?

O trabalho com a temática tempo talvez seja a mais rica oportunidade para trazer a vida para a escola, e quebrando a ideia de que a escola prepara para a vida. Para ter significado, a vida precisa estar na escola.

4.4. Medição de temperatura

As habilidades relacionadas às práticas de medição de temperatura se concentram no **Quarto ano** de escolarização, mas as experiências de vida da criança já permitem que elas já tenham um significativo letramento nessa área.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Medidas de temperatura em grau Celsius: construção de gráficos para indicar a variação da temperatura (mínima e máxima) medida em um dado dia ou em uma semana.	(EF04MA23) Reconhecer temperatura como grandeza e o grau Celsius como unidade de medida a ela associada e utilizá-lo em comparações de temperaturas em diferentes regiões do Brasil ou no exterior ou, ainda, em discussões que envolvam problemas relacionados ao aquecimento global.
Medidas de temperatura em grau Celsius: construção de gráficos para indicar a variação da temperatura (mínima e máxima) medida em um dado dia ou em uma semana.	(EF04MA24) Registrar as temperaturas máxima e mínima diárias, em locais do seu cotidiano, e elaborar gráficos de colunas com as variações diárias da temperatura, utilizando, inclusive, planilhas eletrônicas.

Temos, no dia a dia, sensações de dias quentes ou frios, os telejornais fazem a previsão das temperaturas (associando-as ao clima), a temperatura é percebida na alimentação e em sua preparação e, além disso, não devem ter sido poucas as vezes que a temperatura de seu corpo foi medida. As práticas de ensino, portanto, devem partir da problematização dessas não poucas experiências que os alunos têm acerca da temática temperatura.

Lembre-se que temperatura e calor são grandezas diferentes. A temperatura é uma grandeza associada ao estado termodinâmico do corpo, enquanto o calor é uma grandeza associada à energia em trânsito. Enquanto os graus Celsius e Fahrenheit são exemplos de unidades de medida da primeira, Calorias e Joules são unidades de medida da segunda.

4.5. Sistema monetário

Nesta unidade temática encontra-se um dos principais avanços na concepção curricular da BNCC (BRASIL, 1018) em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997), que é a inclusão de "conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos" (BRASIL, 2018, p. 267).

Moura et al. (2008) observam que as formas pelas quais as operações aritméticas são solicitadas nas práticas escolares, em geral, diferem significativamente daquelas que estão presentes cotidianamente. Segundo eles, essas práticas escolares são caracterizadas pela exigência de operações por escrito, uso de algoritmos convencionais (armar a conta na vertical), discriminação de diferentes ordens da quantidade monetária e escrita da quantidade resultante da operação.

> *Embora essas "exigências" possam fazer sentido para a professora, elas não fazem sentido, à primeira vista, às crianças. Exemplo: a exigência de se escrever o resultado do algoritmo por extenso, provavelmente, está ligada à necessidade posta pela prática extraescolar de se realizar pagamentos via cheques, prática esta, aliás, que tende, cada vez, a tornar-se obsoleta, com a proliferação de novas práticas de realizar compras e de se efetuar pagamentos, presencialmente ou virtualmente, via cartões de débito ou crédito, senhas, netbanking etc. Além disso, nos contextos das práticas comerciais e financeiras extraescolares, dificilmente realizamos algoritmos por escrito, seja na horizontal ou na vertical, para operar com quantidades monetárias. Fazemos cálculos mentais aproximados e, se quisermos precisão no resultado, utilizamos as calculadoras digitais e, apenas como último recurso, os algoritmos escritos. (MOURA et al., 2008, p. 159)*

Tais práticas não são requeridas nas habilidades especificadas na BNCC (BRASIL, 2017) e, ao contrário, elas e seus respectivos objetos de conhecimento propiciam o estudo interdisciplinar envolvendo, além da dimensão econômica, as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, por permitirem a problematização acerca do consumo e do trabalho.

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas.	(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.
Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas e equivalência de valores.	(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.
Sistema monetário brasileiro: estabelecimento de equivalências de um mesmo valor na utilização de diferentes cédulas e moedas.	(EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.
Problemas utilizando o sistema monetário brasileiro.	(EF04MA25) Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.

Nessa perspectiva, Moura *et al.* (2008) recomendam que as práticas escolares devem possibilitar

> *a compreensão, por parte das crianças: das razões pelas quais a Humanidade teria sido levada a produzir sistemas monetários; da existência de muitos sistemas monetários; dos modos de se realizar pagamentos e de se dar ou de se verificar o troco recebido; do modo de funcionamento do mercado das trocas de bens e mercadorias numa sociedade capitalista; de operações de conversões de moedas de diferentes sistemas monetários. (MOURA et al., 2008, p. 163)*

Analise a situação a seguir e perceba o contexto.

Criando uma unidade monetária

As crianças recebem uma determinada quantidade de objetos: figurinhas, bolinhas de gude, carrinhos e bonequinhos de brinquedo. É importante que as crianças recebam quantidades diferentes de objetos entre si.

Pode-se, então, deixá-los brincar de realizar trocas, para verificar como decidem, por exemplo, que duas figurinhas valem um carrinho ou que duas bolinhas de gude valem um bonequinho. Estabelecidas essas relações, é importante anotar as equivalências para se ter um acordo na turma.

A partir dessa brincadeira inicial, discute-se com as crianças sobre as vantagens e desvantagens dessa forma de comércio e se seria possível manter essa mesma forma em toda a sociedade.

Em seguida, é possível criar, em conjunto com as crianças, uma "unidade monetária" estabelecendo-se equivalências em uma tabela. É muito importante respeitar as regras já estabelecidas pelas crianças. Por exemplo, se o combinado é que 1 dinheiro compra 2 carrinhos e as crianças já haviam decidido que cada carrinho vale 2 figurinhas, então devemos ter que 1 dinheiro = 4 figurinhas. Observa-se que, além do trabalho específico com o valor monetário, a proporcionalidade também está envolvida.

Eventualmente, pode-se introduzir uma nova mercadoria que valha menos que 1 dinheiro, criando a necessidade de se criar submúltiplos. Nosso sistema monetário também utiliza submúltiplos: os centavos. Um centavo é a centésima parte de uma unidade monetária.

Finalmente, é importante levantar a discussão do porquê algumas mercadorias precisam de mais dinheiro para serem compradas que outras. A ideia é que as crianças percebam que o custo de uma mercadoria depende de vários aspectos, dentre os quais podemos citar a quantidade de trabalho necessário para a mercadoria ser produzida, a quantidade de material utilizado ou sua raridade.

Fonte: Brasil (2014, p. 49)

Referências bibliográficas

- ANDRADE, J. B. **Composição e Decomposição de Figuras Geométricas Planas por Alunos do Ensino Médio**. 120p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.
- BALDINI, L. A. F. **Construção do Conceito de Área e Perímetro: uma Sequência Didática com Auxílio de Software de Geometria Dinâmica**. 2004. 179p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 2004.
- BALL, D.; HILL, H. H.; BASS, H. **Knowing Mathematics for Teaching**: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, n. Fall, p. 14-46, 2005.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar I**. Matemática. Atividades de apoio à aprendizagem 3. Medidas e Grandezas. Brasília: MEC/SEB, 2007
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Grandezas e Medidas**. Brasília: MEC/SEB, 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC, 2017. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc/> Acesso em: 24/02/2019.
- BRUNHEIRA, Lina. **Uma Trajetória de Aprendizagem para a Classificação e Definição de Quadriláteros**. Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, Edição, v. 145, p. 33-37, 2017.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Gradiva, 1975.
- CARRILLO, J. et al. **The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model**. Research in Mathematics Education,v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.
- CONDEMARIN, M. et al. **Maturidade Escolar**: manual de avaliação e desenvolvimento das funções básicas para a aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artemed, 1989.
- CLEMENTS, D. H., STEPHAN, M. **Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics**. In.: CLEMENTS, D. H., SARAMA, J. e DI BIASE, A., Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education (pp. 299–317). New Jersey: LEA, 2004.
- CROWLEY, M. L. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo, São Paulo: Atual, 1996.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. São Paulo: Autêntica, 2011.
- FLERON, Julian; HOTCHKISS, Philip K. **Discovering the Art of Mathematics**: Patterns. Mathematical Inquiry in the Liberal Arts. Washington DC: Association of America, 2018. Disponível em: <http://www.artofmathematics.org> Acesso em 16/04/2020.
- GALLAHUE, D. L.; OZMUN. J. C. **Compreendendo o Desenvolvimento Motor: Bebês, Crianças, Adolescentes e Adultos**. 3. ed. São Paulo: Phorte, 2005.
- GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen; ROA, Rafael. **Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros**. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.
- GROSSMAN, P. L. **Learning to practice**: the design of clinical experience in teacher preparation. Policy Brief, Washington. D.C.: NEA, maio 2010.
- HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. **Effects of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching on Student Achievement**. American Education Research Journal, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.
- KAMII, Constance; CLARK, Faye B. **Measurement of length**: the need for a better approach to teaching. School Science and Mathematics, v. 97, n. 3, p. 116-121, 1997.
- LE BOULCH, Jean. **Educação Psicomotora: Psicogenética na Idade Escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1987.
- LE BOULCH, Jean. **O Desenvolvimento Psicomotor do Nascimento até 6 Anos**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.
- LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência: o Futuro do Pensamento na Era da Informática**. Trad.: Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- LORENZATO, Sérgio. **Por Que Não Ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista. v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.
- LORENZATO, Sérgio. **Que Matemática Ensinar no Primeiro dos Nove Anos do Ensino Fundamental**. In: 17º COLE-Congresso de Leitura do Brasil. 2009a.
- LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Autores Associados**, 2009b.

- MARQUESIN, Denise F. B.; NACARATO, Adair M. **A Prática do Saber e o Saber da Prática em Geometria: Análise do Movimento Vivido por um Grupo de Professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Zetetike, v. 19, n. 1, 2011.
- MIGUEL, Antônio. et al. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- MIGUEL, Antonio. **Is the Mathematics Education a Problem for the School or Is the School a Problem for the Mathematics Education?** RIPEM, v. 4, n. 2, p. 5-35, 2014.
- MIGUEL. Antônio, MIORIM, Maria Ângela. **O Ensino de Matemática no Primeiro Grau**. São Paulo: Atual, 1986.
- MOURA, Anna R. L. **A Medida e a Criança Pré-Escolar**. 210f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.
- MOURA, A. R. L. et al. **Relatório Final de Avaliação de Desempenho em Língua Portuguesa e Matemática** – 2º ano do ciclo II da Rede Escolar Municipal de Campinas-SP, 2008.
- NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. **A Geometria nas Séries Iniciais: uma Análise Sob a Perspectiva da Prática Pedagógica e da Formação de Professores**. São Carlos, SP: USFCar, 2003.
- PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências**. Zetetiké. v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.
- POLICASTRO, Milena S.; ALMEIDA, Alessandra R.; RIBEIRO, Miguel; JAKOBSEN, Arne. **Kindergarten Teacher's Knowledge to Support Pupils'mathematical Discussion on Measurement Strategies and Procedures**. A Mathematics Education Perspective on early Mathematics Learning – POEM 2018 - Kristiansand, Norway 29-30 May 2018.
- PONTE, João P..; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Autêntica Editora, 2003.
- POZO, Juan Ignacio et al. **A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver a Aprender**. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- ROHDE, G.M. **Simetria**. São Paulo: Hummus, 1982.
- ROUCHE, N. **Le Sens de le Mesure**. Paris: Didier Hatier, 1990.
- SANTOS, J. A. S. Problemas de Ensino e de Aprendizagem em Perímetro e Área de Figuras Planas. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 9, n. 1, p. 224-238, 2014.
- SANTOS, Juliana M. S. R. **A Teoria De Van Hiele no Estudo de Áreas de Polígonos e Poliedro**s. Dissertação de mestrado. 109 f. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes, 2015.
- SÃO PAULO (Estado), Coord. de Estudos e Normas Pedagógicas. **Atividades Matemáticas, 2ª Série do 1º grau**. São Paulo: SE/CENP, 1985a.
- SÃO PAULO (Estado), Coord. de Estudos e Normas Pedagógicas. **Atividades Matemáticas, 3ª Série do 1º grau**. São Paulo: SE/CENP, 1985b.
- SÃO PAULO (Estado), Coord. de Estudos e Normas Pedagógicas. **Atividades Matemáticas, 4ª Série do 1º grau**. São Paulo: SE/CENP, 1985c.
- SILVA, Cília C. R. **Construção de Grandezas e Medidas nos Anos Iniciais: Comprimento, Massa e Capacidade**. 227p. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

SMOLE, Katia S.; DINIZ, Maria Ignez; CANDIDO, P.T. **Coleção Matemática de 0 a 6: Figuras e Formas – v.3**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

SMOLE, K. C. S. **A Matemática na Educação Infantil: a Teoria das Inteligências Múltiplas na Prática Escolar**. Porto alegre: Artmed, 1996.

SUFIATTI, Tanabi; BERNARDI, Lucí S.; DUARTE, Cláudia G. **Cestaria e a História de Vida dos Artesãos Indígenas da Terra Indígena Xapecó**. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, v. 6, n. 1, p. 67-98, 2013.

THALAL, A. et al. **Islamic Geometric Patterns Constructed by Craftsmen Working on Wood**. Symmetry: Culture and Science, v. 22, p. 103-130, 2011.

WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2009.

VERGANUD, G. **A Trama dos Campos Conceituais na Construção dos Conhecimentos**. Revista do GEMPA. Porto Alegre. nº 4. p. 9-19. 1996.

VILLIERS, M. **Algunos Desarrollos en La Enseñanza de la Geometría (1)**. The future of secondary school geometry. La lettre de la preuve, Novembre / Décembre 1996. Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futureb.pdf. Acesso em 24/05/2020.

VILLIERS, M. **Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 12, n. 3, 2010.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

Este livro foi editado por Cidadela Editora e Act Design Gráfico nas tipologias
Dinot regular e bold (textos) e Museo black (título), para Interação Urbana.
1ª edição / 1ª reimpressão
São Paulo, julho de 2021

Esta publicação integra o material pedagógico produzido e adotado pela Interação Urbana no projeto Klabin Semeando Educação.

© Interação Urbana - Todos os direitos reservados.