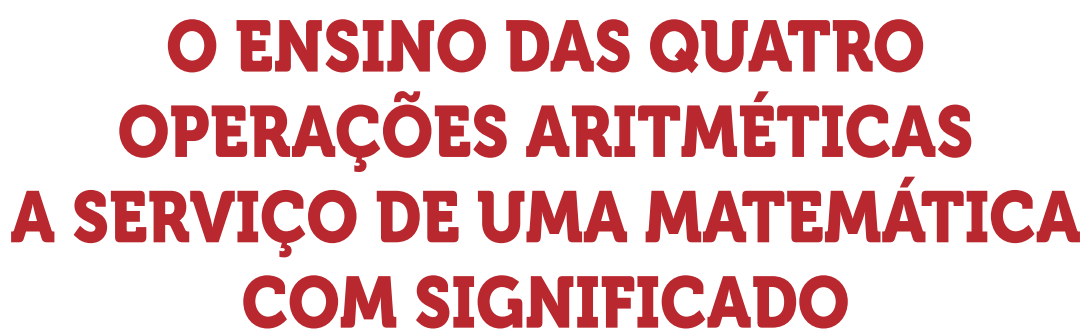






## OBJETIVOS KLABIN PARA O DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Em 2015, a Organização das Nações Unidas lançou 169 metas a serem cumpridas até 2030. Essas metas foram divididas em 17 categorias, com o objetivo de transformar o mundo. Elas foram chamadas de Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, ou ODS.

Aqui na Klabin, o compromisso de conservar a natureza e construir um futuro sustentável faz parte do nosso DNA. Não é por acaso que cuidamos dos ecossistemas das regiões onde atuamos, investimos em soluções para que nossas operações industriais sejam mais eficientes e usem menos recursos naturais e buscamos parcerias locais.

Pensando no que os ODS propõem e na visão de mundo da Klabin, em 2016 aderimos voluntariamente aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável e priorizamos 14 itens para criarmos a nossa própria Agenda Klabin 2030.

A agenda tem 23 temas materiais e seus 25 objetivos de curto, médio e longo prazo, os quais chamamos de KODS - Objetivos Klabin para o Desenvolvimento Sustentável.

O Klabin Semeando Educação tem objetivos intrínsecos voltados à melhoria da educação pública. Suas práticas ocorrem através do apoio às Secretarias de Educação dos municípios onde a Klabin S/A atua, oportunizando práticas impulsionadoras de gestão e formação escolar na busca de uma educação pública mais equitativa, mais inclusiva e de qualidade.

A partir das quatro frentes de trabalho – Gestão Educacional, Formação Pedagógica, Recursos e Infraestrutura e Práticas Avaliativas – o foco do Klabin Semeando Educação é um compromisso para que a empresa também possa contribuir com a meta desafiadora do ODS 4 - Educação com Qualidade ao longo da vida de todos e todas.

O Caderno de Formação que você acaba de receber é mais um dos instrumentos oferecidos por este Programa para apoiar a formação contínua do público participante.

Aproveitem! Boa leitura!

# **O ENSINO DAS QUATRO OPERAÇÕES ARITMÉTICAS A SERVIÇO DE UMA MATEMÁTICA COM SIGNIFICADO**

## **Módulo II**



Esta publicação integra o material pedagógico produzido e adotado pela Interação Urbana no projeto Klabin Semeando Educação.  
© Interação Urbana - Todos os direitos reservados.

# Uma primeira conversa...

---

Este segundo módulo do curso de Matemática do Projeto Klabin Semeando Educação segue com seu objetivo de oferecer um ensino que atribua significado aos conceitos e procedimentos matemáticos. Os resultados das avaliações externas que vêm sendo apresentados pela mídia nas duas últimas décadas justificam esse empenho.

Neste módulo, todo o empenho foi colocado para que os professores que ensinam a Matemática conheçam os diferentes significados das quatro operações aritméticas básicas e das frações, para que consigam ter sucesso na aprendizagem de seus alunos. Para isso, todas as propostas presentes neste módulo refutam o ensino de Matemática como a mera aplicação de regras prontas, tão comuns no ensino das operações aritméticas e das frações.

Apesar de a Matemática ser uma ciência exata, não deve ser vista como aquela que encontra uma única solução para os problemas que ajuda resolver. Em geral, assim como ocorre nos problemas reais encontrados na vida, sejam eles ligados aos fenômenos naturais ou aos fenômenos sociais, há diferentes formas de solução e com resultados por vezes diferentes. Obviamente, existem soluções e formas de resolução mais adequadas, mas essa adequação depende do contexto. Por isso, na sala de aula, mais do que encontrar rapidamente uma solução exata e precisa, as tarefas matemáticas devem permitir a análise das diferentes soluções e das distintas formas de resolução. A rica diversidade provocará o debate, que vai ajudar no desenvolvimento das competências especificadas pela BNCC.

Neste material não existem listas de exercícios, que, apesar de importantes para o processo de consolidação da aprendizagem, normalmente levam à mera aplicação mecânica de regras. São encontradas aqui propostas que levarão o aluno a pensar, propor, discutir e validar com os colegas de classe seus resultados e pensamentos. Tais atitudes o levarão a atribuir significado ao que faz, e não decorar tais regras.

Também não há a abordagem dos algoritmos na fase inicial do ensino das operações. Essa decisão metodológica levaria a um ensino mecânico e sem significado para os alunos. O algoritmo deve ser resultado de um processo em que os alunos desenvolvem e debatem diversas formas de operar e em distintos contextos.

---

Com este trabalho, esperamos derrubar a ideia de que “é normal que o maior número de alunos não seja capaz de entender a Matemática, porque precisa gostar dela e nem sempre todos gostam”. Esse entendimento tem se naturalizado por várias gerações, mas é o principal equívoco que qualquer professor pode ter, afinal, todos são capazes de aprender igualmente a Matemática, tanto meninos quanto meninas.

Neste segundo módulo, os conceitos e procedimentos inerentes às operações aritméticas e às frações são desenvolvidos após o conceito de número e o Sistema de Numeração Decimal (presentes no Módulo I) terem sido abordados. No entanto, a exploração do ensino das operações aritméticas consolida tais conhecimentos. Para isso, é necessário que os alunos percebam e consigam explicitar, de maneira oral e escrita, os princípios e propriedades do Sistema de Numeração Decimal. Será dessa forma que os alunos, ao realizarem os cálculos aritméticos, estarão concomitantemente subsidiando o desenvolvimento de conceitos e habilidades necessários para a estimativa e para o cálculo mental.

Por isso, há um grande empenho neste módulo para que os alunos reconheçam a coerência entre as linguagens oral e escrita e a manipulação dos recursos didáticos, sem perder o rigor dos conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos. Durante o processo de aprendizagem, professor e alunos devem contemplar de forma correlacionada e coerente a manipulação concomitante das quantidades, dos símbolos escritos e das expressões usadas. A expressão dos pensamentos aritméticos inevitavelmente ocorre por meio do uso de símbolos (orais e escritos) e da manipulação dos recursos didáticos. Essa correspondência propiciará uma aprendizagem mais efetiva dos algoritmos, sejam resultados de procedimentos pessoais ou daqueles presentes nos algoritmos convencionais.

# Sumário

6

## **Introdução**

A Matemática está presente em nosso cotidiano e nos ajuda a interpretar e a intervir no mundo. Mas por que tantas pessoas têm dificuldade em relação a ela? A resposta é a distância entre a matemática cotidiana e a matemática escolar.

11

## **1 Operações aritméticas: fazemos..., mas sabemos o que fazemos?**

O ensino das quatro operações aritméticas é, em geral, a prática escolar mais valorizada nos cinco primeiros anos de escolarização. Porém, existem diferentes significados para cada operação e eles devem ser compreendidos pelos alunos.

27

## **2 Formas para desenvolver o pensamento aritmético**

O uso de jogos e o estímulo à diversificação de estratégias (por meio das “Conversas matemáticas”) ajudam a evitar a memorização de fatos matemáticos sem significado e a compreender os algoritmos convencionais.

37

## **3 Introdução aos procedimentos de cálculo**

Chegou o momento das técnicas operatórias e dos algoritmos convencionais, não convencionais e de cálculo mental. É importante que os alunos tenham passado pela construção dos conceitos intrínsecos ao Sistema de Numeração Decimal (SND).

41

## **4 Adição com números naturais**

A adição é provavelmente a operação mais simples de ser ensinada. Mas isso não significa que ela não demanda cuidados do professor. Por ser a primeira das operações aritméticas, requer atitudes especiais para que o ensino seja profícuo.

# 65

## 5 Subtração com números naturais

O desenvolvimento da ideia de subtração como operação aritmética, e não algoritmo, deve ocorrer apenas após a consolidação das ideias da adição. Mas os alunos na fase inicial da escolarização já possuem noções da subtração, construídas em seu cotidiano.

# 87

## 6 Multiplicação com números naturais

No trabalho que visa dar significado aos algoritmos convencionais da multiplicação, os significados da multiplicação precisam estar consolidados nos alunos. Vejamos estratégias para desenvolver os fatos multiplicativos com significado.

# 105

## 7 Divisão com números naturais

A divisão é uma das operações aritméticas que requer maior cuidado para que sua aprendizagem ocorra. Veremos aqui procedimentos para construir significados para a divisão.

# 123

## 8 Pensamento aritmético com frações

Garantir a aprendizagem de frações tem sido um dos maiores desafios para os professores. Ao mesmo tempo, estudos mostram que o conhecimento do professor é o fator, dentre os que podem ser controlados, que tem maior impacto na aprendizagem dos alunos.

# 143

**Bibliografia**

### FICHA TÉCNICA

**Coordenação geral:**

Mauro Zanin e Marco Aurélio de Lima e Myrrha

**Coordenação técnica:**

Patrícia Terezinha Cândido

**Elaboração:**

Adilson Dalben

**Edição e preparação de texto:**

Eder Santin / Cidadelas Editora

**Ilustrações:**

André Xavas (páginas 13, 14, 15, 16, 17, 63, 84, 98, 108, 117, 141 e 142)

**Serviços editoriais:**

Act Design Gráfico

# Introdução

---

A Matemática é a ciência das abstrações e uma linguagem ao mesmo tempo. Para melhor entendimento dessa afirmação basta pensar em um dos conceitos mais comumente associados à Matemática: o número. Número não existe concretamente, não pode ser tocado! Ele, como um quantificador, é fruto de uma relação de ordinalidade e cardinalidade de conjunto de objetos e, depois disso, recebe um nome e pode ser representado por um símbolo.

Por essa sua capacidade de (também!) quantificar, a Matemática está presente em nosso cotidiano e nos ajuda a melhor ler, interpretar e intervir no mundo que nos cerca. Ela é uma ciência que nos ajuda a interpretar o presente e o passado e a projetar o futuro.

Mas se ela está tão próxima de todos no dia a dia, por que são tantas as pessoas com dificuldade em relação a ela?

Certamente a resposta a essa pergunta perpassa pela distância entre a matemática cotidiana, aquela presente em nossas ações pessoais e profissionais, que nos permite entender que sua construção histórica foi motivada pelas necessidades da vida em sociedade – como o é ainda hoje – e a matemática escolar, aquela que generaliza de tal forma os conhecimentos matemáticos que eles se tornam definições, regras e aplicação sem qualquer significado.

Em um trecho inicial do livro “Triste fim de Policarpo Quaresma”, pode-se elucidar esse contexto da matemática escolar.

*“Não gastava nesses passos nem mesmo uma hora, de forma que, às três e quarenta, por aí assim, tomava o bonde, sem erro de um minuto, ia pisar a soleira da porta de sua casa, numa rua afastada de São Januário, bem exatamente às quatro e quinze, como se fosse a aparição de um astro, um eclipse, enfim um fenômeno matematicamente determinado, previsto e predito. A vizinhança já lhe conhecia os hábitos e tanto que, na casa do Capitão Cláudio, onde era costume jantar-se aí pelas quatro e meia, logo que o viam passar, a dona gritava à criada: “Alice, olha que são horas; o Major Quaresma já passou”. E era assim todos os dias, há quase trinta anos.” (BARRETO, 2011, pg. 1) <sup>1</sup>*

---

1 - BARRETO, Lima. **Triste fim de Policarpo Quaresma**. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

---

Nesse sentido, Marilena Chauí completa essa questão com relação aos conhecimentos matemáticos: “São eles uma abstração e uma purificação dos dados de nossa experiência sensível? Originam-se da percepção ou são realidades ideais, alcançadas exclusivamente pelas operações do pensamento puro?” (2000, p.332)<sup>2</sup>.

Por isso, Polya (1995) , no prefácio da primeira edição de seu livro “A Arte de Resolver Problemas”, faz um alerta que é considerado um dos pressupostos na produção deste módulo.

*Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando assim, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desfia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com seus conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e propiciar-lhes certos meios para alcançar esse objetivo. (p. v) <sup>3</sup>*

Outro aspecto considerado importante neste material é o estabelecimento da aderência à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nela está explicitada a indissociabilidade entre os conceitos de número e de operações.

*(...) tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2017, p. 224)*

---

2 - CHAUÍ, Marilena. **Convite à Filosofia**. São Paulo: Ática, 2000.

3 - POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

---

Além disso, após uma minuciosa análise das habilidades especificadas na BNCC, os principais elementos foram valorizados:

- a) A constituição e os significados das operações.
- b) Diversificação das estratégias de resolução.
- c) O uso de recursos didáticos manipuláveis.
- d) O uso da reta numérica para sustentar a construção conceitual das operações.
- e) O cálculo mental como finalidade e como estratégia.

Como poderá ser percebido, todo o material está escrito com base na crença de que o conhecimento matemático, quando construído com significado, é perene e permite sua conexão com outras áreas de conhecimento, retroalimentando todo esse processo de significação.

Na elaboração deste material foram respeitados os seguintes pressupostos metodológicos:

- Erradicação da ideia de aprendizagem meramente mecânica dos algoritmos.
- Desenvolvimento da ideia de que as operações aritméticas são processos mentais e que, por isso, admitem distintos procedimentos algorítmicos com diversificadas formas de representação.

- 
- Valorização da prática do cálculo mental.
  - Compreensão dos procedimentos algorítmicos desenvolvidos em diferentes culturas e momentos históricos.
  - Usar a resolução de problemas e a investigação matemática para potencializar a exploração dos diferentes procedimentos algorítmicos e as diversificadas formas de representação.
  - Reconhecer os diferentes significados de cada uma das operações aritméticas.
  - Garantir a coerência no desenvolvimento da tarefa matemática (enunciado, algoritmo, representação do algoritmo, validação do processo e do resultado e utilização dos recursos didáticos) com base nos diferentes significados de cada uma das operações aritméticas.
  - Estabelecer as conexões entre as regras constitutivas do sistema numérico hindu-arábico e os diferentes procedimentos algorítmicos das operações aritméticas, com o adequado uso dos recursos didáticos utilizados para garantir a visualização e a abstração inerente a esses processos.
  - Promover práticas escolares que estabeleçam claras relações para a resolução de problemas presentes nos contextos escolares e extraescolares.

[illegible]

# 1 Operações aritméticas: fazemos... mas sabemos o que fazemos?

Todos que já se sentaram em carteiras escolares tiveram aulas sobre as quatro operações aritméticas e, de uma forma ou outra, acabaram aplicando um algoritmo. Mas, diante de uma situação um pouco diferente, fica a dúvida: será que aprenderam mesmo a fazer operações?

O ensino das quatro operações é, em geral, a prática escolar mais valorizada nos cinco primeiros anos de escolarização e, por isso, é a mais comum de ser encontrada nas salas de aula. Apesar desse contexto, os exames de larga escala, como a Prova Brasil, mostram a fragilidade dos alunos nessas operações. Com esse resultado, fica constatado que, apesar das quatro operações terem sido trabalhadas, elas não foram efetivamente aprendidas pelos alunos.

Em 2008, uma grande cidade desenvolveu um tipo de avaliação externa que aprofundou essa análise, colocando nas provas dois tipos de questões: típicas e não típicas. Veja um exemplo de cada uma dessas questões:

## Questão 1 - Típica

1. Arme e efetue:

a.  $54 \times 72 =$

b.  $129 : 3 =$

c.  $2009 - 748 =$

## Questão 2 - Atípica

2. A professora Tereza pediu aos seus alunos que resolvessem as duas adições seguintes:  $982 + 253$  e  $178 + 439$ . A aluna Júlia resolveu essas contas do modo abaixo.

$$\begin{array}{r} 982 \\ + 253 \\ \hline 1235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 178 \\ + 439 \\ \hline 617 \end{array}$$

Qual é sua opinião? A professora deve dar certo ou errado para os resultados de Júlia? Justifique sua resposta.

A questão 1 foi considerada típica por estar presente nos cadernos dos alunos de mais de 100 turmas analisadas. Mas, apesar disso, apenas 12,0% acertaram as três operações e 50,8% erraram pelo menos uma delas.

Já a questão 2 não foi considerada tão comum. Ela tem muitos outros conhecimentos e habilidades para além do mecanismo de algoritmo e foi resolvida adequadamente por apenas 2,6% dos alunos.

Esses dados foram apresentados para justificar que, apesar do ensino das quatro operações serem considerados elementares, de fato não o são. O ensino das quatro operações não pode ser meramente mecânico para que os alunos possam efetivamente aprendê-las.

Quase todos sabem fazer as operações usando os algoritmos, mas quando cometem erros, não os percebem. Isso ocorre por conta do ensino mecânico dos algoritmos, algo que precisa ser superado no ensino.

Mas o professor que optar por essa superação, escolhendo um caminho metodológico que atribui significado, deve estar ciente que terá de enfrentar pelo menos um obstáculo. Como o caminho que permite ensinar as operações de forma não mecânica é pausado e devidamente sequenciado para permitir explicitar os porquês das operações, muitas vezes as pessoas que fazem parte da convivência dos alunos o entendem ser muito moroso. Diante disso, essas pessoas reproduzem o processo mecânico, queimando as etapas que o professor iria construir, afirmando: “não faça assim não, faça desse outro jeito que é mais fácil e rápido”.

Quando ensinadas sem significados, os alunos têm dificuldade em identificar quais operações devem ser usadas para resolver os problemas que lhe são propostos. Diante dessas dificuldades, é comum perceber que as crianças começam a estabelecer relações entre as palavras presentes nos enunciados e as operações. Quando isso ocorre, o professor deve interpretar como sendo um indicador da não aprendizagem e não como um mero erro do aluno. Requer do professor a proposição de novas tarefas matemáticas para que os alunos venham a atribuir os significados às operações.

### **1.1) Os diferentes significados de cada uma das quatro operações aritméticas**

A diferença entre esses significados pode ser sutil, mas de muita importância para a efetiva aprendizagem das operações aritméticas. É importante nas operações que envolvem os números naturais e crescem de importância quando envolvem os números racionais, independentemente da forma de representação em que aparecem (fracionária, decimal ou porcentual).

Mas isso não quer dizer que esses significados devem se tornar objetos de conhecimento para os alunos. É importante que o professor os conheça para que ele tenha coerência em todo o seu processo de ensino, que começa com a proposição de enunciados dos problemas, perpassa pela resolução e vai até a validação dos resultados encontrados.



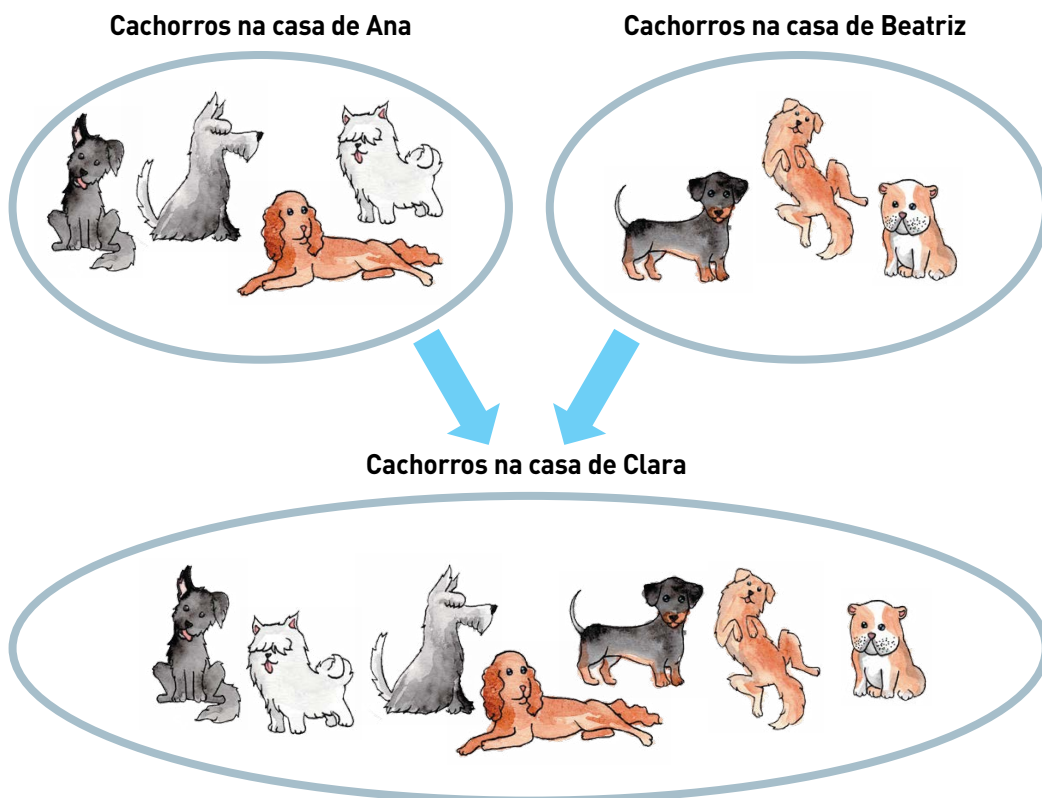
## 1.2) Os dois significados da adição

Os diferentes significados que podem ser atribuídos às situações que envolvem a adição são exemplificados nos enunciados a seguir:

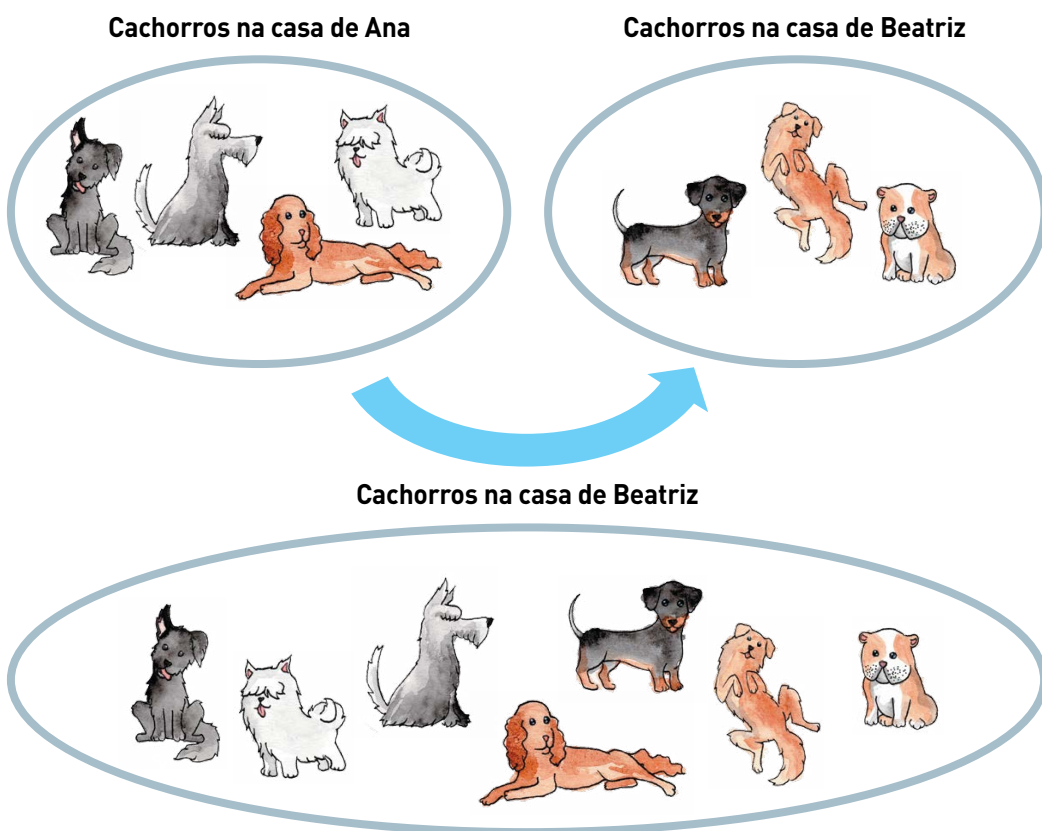
- Clara tem duas amigas, chamadas Ana e Beatriz. A Ana tem quatro cachorros e a Beatriz tem três. Em um certo dia, as duas amigas foram viajar e levaram seus cachorros até a casa da Clara para ela cuidar deles. Quantos cachorros ficaram na casa de Clara?
- Clara tem duas amigas, chamadas Ana e Beatriz. A Ana tem quatro cachorros e a Beatriz tem três. A Ana precisou viajar e deixou os seus cachorros na casa da Beatriz durante uma semana. Quantos ficaram na casa da Beatriz?

Os dois problemas são semelhantes, porém, possuem significados diferentes da adição. Enquanto o primeiro traz o significado de juntar, o segundo tem o significado de acrescentar.

O significado de juntar tem, de forma subjacente, o conceito de união de conjuntos, ou seja, a união dos dois conjuntos resulta em um outro conjunto. Para a resolução, a contagem é feita desde o início. Os movimentos usados para representar essa situação consistem em colocar dois conjuntos de elementos e juntá-los. A resposta desse problema está associada à quantidade final desse novo conjunto, no caso o conjunto dos cachorros que ficaram na casa de Clara.



O significado de acrescentar carrega a ideia de transferir os elementos de um conjunto para outro. Nessa situação, os elementos do segundo conjunto podem ser transferidos para o primeiro, ou vice-versa. Os movimentos usados para representar essa situação consistem em colocar dois conjuntos de elementos e trazer os elementos de um conjunto para outro. Para a resolução, a contagem é feita a partir do que o primeiro conjunto tinha. A resposta desse problema está associada à quantidade final do novo conjunto, o que corresponde ao número de cachorros que ficaram na casa de Beatriz.



Para compreender a importância desses dois significados no ensino das operações, basta imaginar os movimentos que os professores fazem na contagem dos resultados. Deve-se considerar também que no segundo significado há a necessidade da conservação e que nesse caso  $4 + 3$  tem um significado diferente de  $3 + 4$ , apesar do resultado ser numericamente igual. No primeiro caso, o quatro é acrescido de três e no segundo, três é acrescido de quatro.

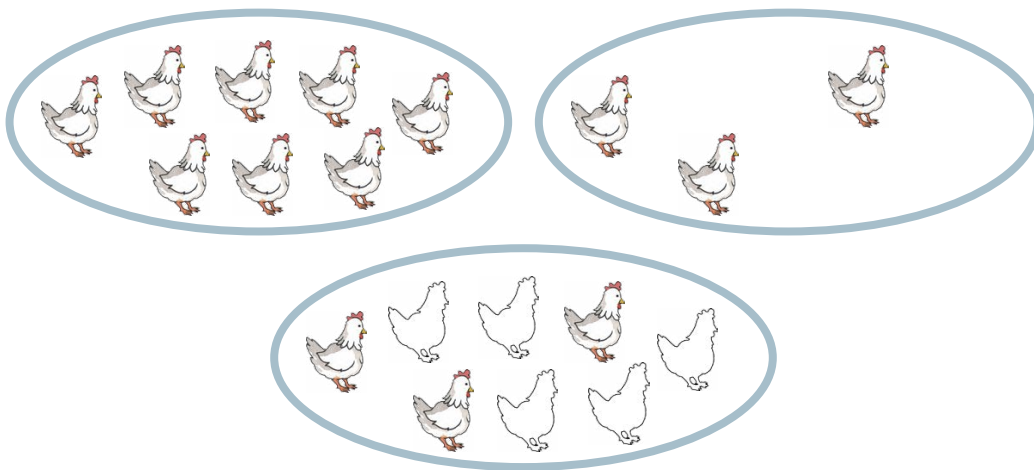
Essa diferenciação é importante durante a manipulação dos materiais usados como recurso didático e na linguagem e representação usadas pelos professores e alunos. Aliás, esse resultado numericamente igual é uma propriedade da adição chamada comutativa, cujo nome tem pouca importância para os alunos, mas ela deve ser construída.

### 1.3) Os três significados da subtração

Os problemas que envolvem a subtração podem ter três distintos significados: subtrativo, aditivo e comparativo. Cada um dos enunciados a seguir apresenta um diferente significado para a subtração.

- a) Na chácara de minha avó há 8 galinhas, mas infelizmente o galinheiro foi atacado por raposas e 5 delas morreram. Com quantas galinhas minha avó ficou?
- b) Minha avó quer ter 8 galinhas em sua chácara e já tem 5. Quantas ela precisa comprar para atender seu desejo?
- c) Na chácara de minha avó há 8 galinhas e sua vizinha tem 5. Qual é a diferença entre a quantidade de galinhas que elas têm?

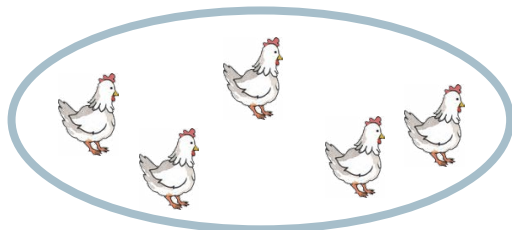
O primeiro problema, o mais natural para as crianças, traz o significado de tirar. Nele há a ideia de um conjunto composto por 8 elementos dos quais são retirados 5. Os movimentos usados para representar essa situação consistem em colocar 8 elementos para compor o conjunto e depois são retirados 5 deles. O resultado é um conjunto com uma quantidade menor de elementos. A resposta a essa situação está associada à ideia de resto, ou seja, restaram três galinhas. Este é o significado subtrativo da subtração e o resultado significa um resto, algo que sobrou.



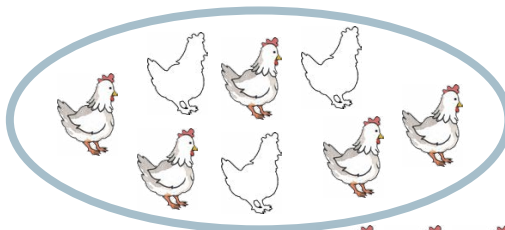
O segundo problema é bastante comum, mas o significado de acrescentar ou completar – por isso, aditivo – gera um certo estranhamento para a subtração. Nele, há a ideia de que um conjunto precisa ser composto por 8 elementos (ideia de futuro, abstração), mas atualmente (presente) tem apenas 5. Os movimentos usados para representar essa situação consistem em colocar um conjunto de 5 galinhas e depois ir acrescentando o número de galinhas até chegar a 8, para compor o conjunto com o número desejado. O resultado é o conjunto de

elementos que foram adicionados. Nas etapas iniciais, essas duas abstrações precisam ser materializadas. A resposta a essa situação está associada à ideia do que falta para completar.

Quantas galinhas há: 5



Quantas galinhas deseja ter: 8

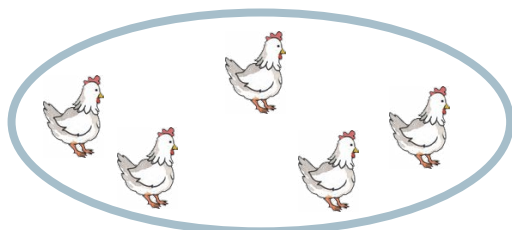


Quantas galinhas serão acrescentadas: 3

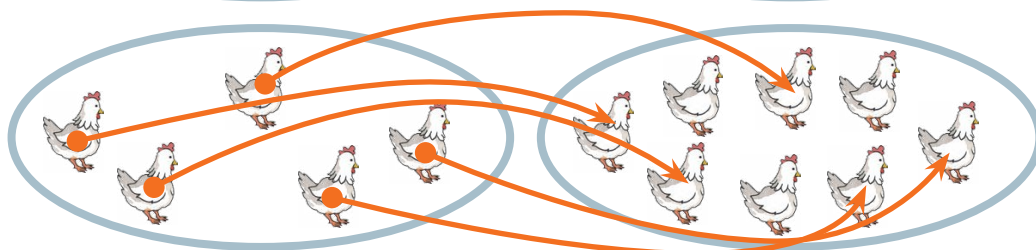
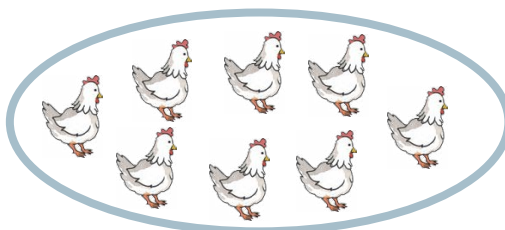


O terceiro problema traz o significado de comparar. As operações mentais associadas a esse significado são usadas, pelas crianças, desde a constituição do senso numérico – portanto, desde a constituição do conceito de número. O problema traz a ideia de dois conjuntos e a comparação entre as duas quantidades. Os movimentos usados para representar essa situação consistem em explicitar dois conjuntos e compará-los, geralmente por paridade. A diferença entre eles define um novo conjunto. A resposta dessa situação está associada à ideia da diferença.

Quantas galinhas há em um conjunto: 5



Quantas galinhas deseja ter: 8



Diferença no número de galinhas: 3

Com a compreensão destes três significados da subtração fica evidente a coerência que o professor precisa ter em cada uma das etapas da resolução de problemas que envolvem a subtração. Ele precisa ter claro que para a criança entender é diferente ele dizer “de 8 tiro 5 e restam 3”, “tenho 3, para 8 faltam 5” e “a diferença de 8 para 3 é cinco”. A linguagem usada reflete na sua forma de representação e na forma com a qual ele manipula os recursos didáticos.

### 1.4) Os três significados da multiplicação

A multiplicação tem também três significados, apesar de apenas dois deles aparecerem explicitamente na BNCC. São eles: a soma de parcelas iguais, configuração retangular (com conexão direta com a unidade temática de Geometria e de Grandezas e Medidas) e pensamento combinatório (com conexão direta com a unidade temática de Probabilidade e Estatística). Os problemas a seguir elucidam cada um desses significados:

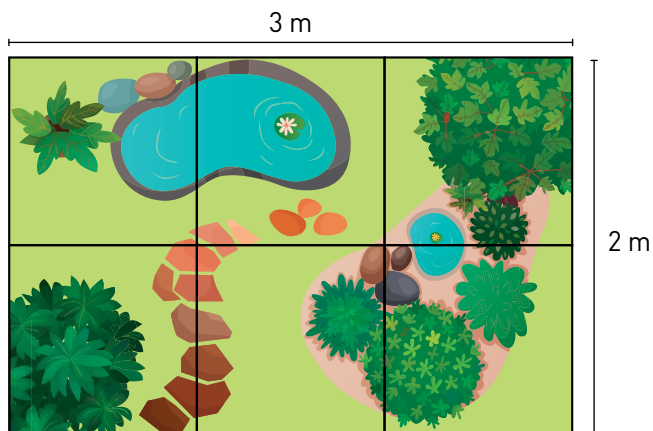
- a) Um casal teve trigêmeos. Para melhor organização da família, cada bebê precisa de 2 mamadeiras. Quantas mamadeira a família terá que comprar?
- b) O jardim de uma casa tem formato retangular com o comprimento medindo 3 metros e largura medindo 2 metros. Qual é a área desse jardim?
- c) Lucas é um jogador de basquete. Ele tem 3 camisas, cada uma com uma cor diferente (uma azul, uma verde e uma amarela) e 2 bermudas (uma laranja e outra cinza). De quantas maneiras distintas ele pode se vestir usando uma dessas camisas e uma dessas bermudas?

No primeiro problema está o mais comum dos significados (por muitos considerados como único), que é o da soma de parcelas iguais. Na BNCC, essa habilidade marca o início da multiplicação. Ela implica a contagem por meio da formação de conjuntos de partes iguais e que leva à inferência de que a multiplicação é a soma sucessiva da mesma quantidade. Marca também o trabalho dos fatos básicos da multiplicação (o trabalho com as conhecidas tabuadas da multiplicação).

Um cuidado que os professores precisam tomar nesse momento é que, apesar de “3 x 2” ter o mesmo resultado numérico (produto) de “2 x 3”, seus significados são diferentes. A primeira multiplicação representa 3 parcelas de 2 unidades (ou 3 conjuntos com 2 elementos) e a segunda representa 2 parcelas de 3 unidades (ou 2 conjuntos com 3 elementos).



O segundo problema remete diretamente ao contexto de geometria e leva também à visualização de fileiras e colunas, por isso seu significado é denominado configuração retangular.

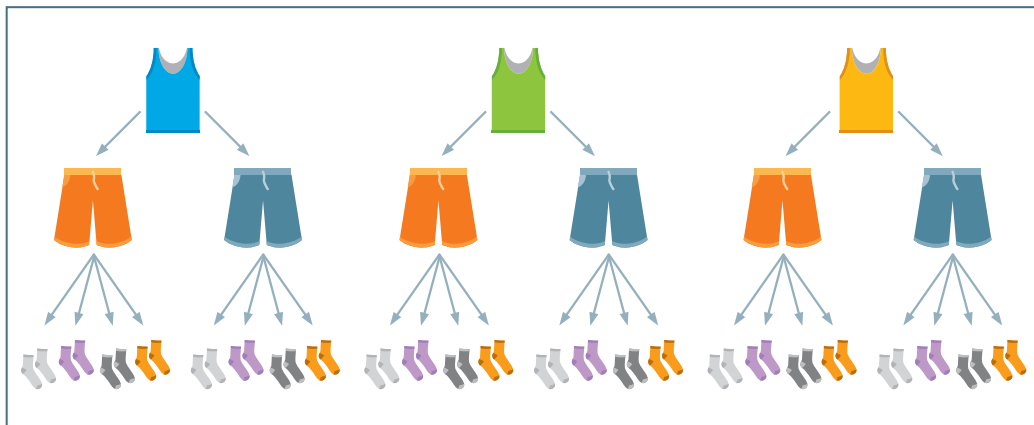


O terceiro enunciado coloca um problema inerente ao pensamento combinatório, traz o significado combinatório. Nele, há uma associação entre cada um dos elementos de dois ou mais diferentes conjuntos, resultando em um novo conjunto.

A representação dessas associações deve ser diversificada, por meio de esquemas como árvore de possibilidades ou tabelas.



Apesar de ambas as representações levarem ao princípio da contagem, a árvore de possibilidades deve também ser explorada, uma vez que é potente para organizar a contagem quando são envolvidos elementos de mais de dois conjuntos. Um exemplo seria o terceiro enunciado incluindo também quatro tipos de meias, como opções.



Após a apresentação desses três significados, tal como ocorre nas demais situações, não é adequado afirmar que nos dois últimos tipos de problemas o significado da multiplicação é a soma de parcela iguais, uma vez que o raciocínio a ser desenvolvido para a resolução de problemas dessa natureza requer formas distintas de procedimentos, e portanto, de linguagem e representações.

### 1.5) Os dois significados da divisão

A divisão geralmente é associada a apenas um significado - o da partição em partes iguais. No entanto, há outro significado que está associado à medição, sendo este último igualmente importante. Tão importante que, muitas vezes, ele é usado sem que se tenha a consciência de seu uso. Este segundo significado da divisão é muito recorrente em diversas situações, incluindo o desenvolvimento e aplicação da técnica operatória da divisão, quando é feita a pergunta “Quanto cabe?”

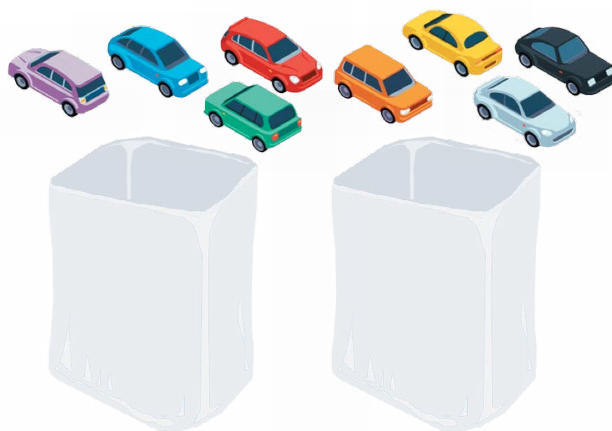
A seguir são apresentadas duas situações que elucidam esses dois significados.

- Lucas possui 8 miniaturas de carros antigos e quer montar 2 saquinhos com igual quantidade de miniaturas para dar de presente aos seus dois melhores amigos. Quantas miniaturas deverá conter cada saquinho? Depois da distribuição entre os saquinhos, sobrar alguma miniatura para Lucas?

- b) Lucas tem muitos saquinhos que cabem 2 miniaturas de carros antigos em cada um. Ele quer esses saquinhos em uma caixa que tenha ao todo 8 miniaturas. Quantos saquinhos de 2 miniaturas ele poderá colocar nessa caixa?

Na primeira situação, em que o significado da divisão é o da partição em partes iguais, o conjunto de elementos a serem distribuídos e também o número de conjuntos em que os elementos serão distribuídos está definido no início do processo. O movimento é de deslocamento dos elementos do primeiro conjunto para cada um dos conjuntos seguintes, nos quais serão distribuídos. Essa distribuição é sucessiva, com igual número de elementos em cada iteração (cada etapa do processo de distribuição), até que não se possa mais distribuir os elementos nos diversos conjuntos. Essas iterações se encerram quando não restarem mais elementos ou restarem elementos que não possam ser distribuídos igualmente entre as partes. A resposta a essa situação está associada a quantas miniaturas couberam em cada saquinho. Este procedimento é importante na fase inicial do ensino da técnica operatória da divisão.

#### Antes da distribuição



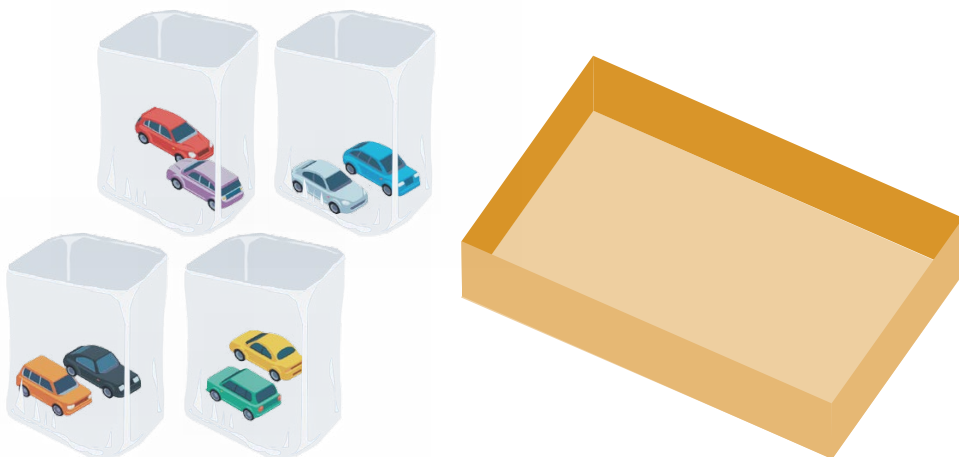
#### Depois da distribuição



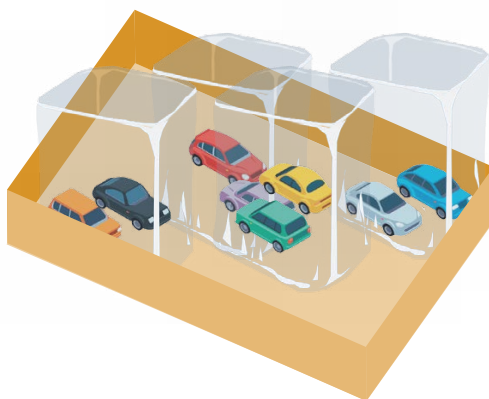
Já na segunda situação, o significado da divisão é o da medida. Nela, deseja-se verificar quantos saquinhos com 2 miniaturas cabem em uma caixa que comporta 8 dessas miniaturas. Deve-se notar que o saquinho com 2 miniaturas é, nesse caso, a referência. Os passos sucessivos consistem em deslocar um saquinho por vez e até se verificar que não mais cabe na caixa, o seja, a iteração agora ocorre até chegar a 8. O resultado é o número de saquinhos que coube na caixa, podendo ou não sobrar elementos no conjunto inicial. Este procedimento é frequentemente usado nas fases finais das técnicas operatórias da divisão, quando se pretende estimar o quociente. É feita, por exemplo, quando se diz: “Em 17, quantos 3 cabem?” ou “quantos 3 cabem em 17?”

Este segundo significado da divisão como medição é também importante para permitir o entendimento da divisão por números racionais não inteiros, afinal, não é concebível fazer uma divisão, por exemplo, de 3 por 0,5 ou 1,5. Para atribuir significado a esta operação, a pergunta a ser feita é: “Quantos 0,5 cabem em 3?” ou “1,5 cabe em 3?”

#### Antes da colocação dos saquinhos



#### Depois da colocação dos saquinhos



## 1.6) Os significados das operações aritméticas na BNCC

Esgotada a apresentação dos 10 significados das quatro operações aritméticas básicas é importante salientar que tais significados não devem se tornar objetos de conhecimento. Esses significados devem fazer parte apenas do conhecimento do professor, para que ele possa melhor ensinar as operações.

Além disso, o professor deve notar que os significados estão diretamente presentes em muitas das habilidades descritas na BNCC, mas o trabalho não pode se limitar a elas. Tais habilidades são essenciais, mas não suficientes. Certamente o trabalho do professor que considera esses pressupostos inevitavelmente vai cumprir e extrapolar tais habilidades.

### Habilidades relacionadas diretamente aos significados das operações

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>(EF01MA06)</b> | Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.                                                                                                                                                                        |
| <b>(EF01MA08)</b> | Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. |
| <b>(EF02MA03)</b> | Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”, indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos.          |
| <b>(EF02MA05)</b> | Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito.                                                                                                                                                                                   |
| <b>(EF02MA06)</b> | Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais ou convencionais.                                                              |
| <b>(EF02MA07)</b> | Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.                                            |

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>(EF03MA03)</b> | Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.                                                                                                                                                     |
| <b>(EF03MA05)</b> | Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais.                                                                                              |
| <b>(EF03MA06)</b> | Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.       |
| <b>(EF03MA07)</b> | Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.                    |
| <b>(EF03MA08)</b> | Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.               |
| <b>(EF04MA03)</b> | Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado.                                                 |
| <b>(EF04MA04)</b> | Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.                                                                                                                        |
| <b>(EF04MA06)</b> | Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. |
| <b>(EF04MA07)</b> | Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.    |

Cada uma das descrições anteriores teve a preocupação de explicitar que o significado associado a um contexto está presente no enunciado da tarefa matemática proposta aos alunos, e que esse significado deve ser mantido no procedimento de resolução e na resposta do problema. Curiosamente, o significado define não só as operações mentais e os movimentos corporais dos estudantes para resolver o problema, mas também as operações mentais e movimentos dos professores quando dão explicações.

O significado das operações deve ser o eixo orientador das três etapas básicas para que o processo de ensino tenha coerência: a) interpretação do problema; b) resolução; e c) elaboração e validação da resposta.

Por tudo isso, os significados das operações devem fazer parte do conhecimento matemático e pedagógico do professor, uma vez que são os significados das operações que devem orientar a representação e o material didático a ser usado por ele.

A BNCC, ao especificar as habilidades, reforça também a importância dos recursos didáticos, como conjuntos de objetos, material dourado, ábaco, mas inova quando pede que a construção dos conceitos de números e das operações aritméticas sejam também apoiadas na reta numérica.

Não se pode esquecer que a reta numérica, assim como o ábaco e o material dourado, precisa facilitar a visualização. Por isso esses recursos requerem o uso da linguagem adequada em cada etapa do processo. Todos eles são importantes e como qualquer outro recurso didático possuem suas potencialidades e limitações. Ou seja, a eles também as regras não devem ser impostas, mas sempre favorecer a construção do significado. Por esse motivo, estimular a elaboração de procedimentos pessoais para o desenvolvimento das operações é tão importante.

Para encerrar esta seção, é importante destacar que o que está especificado na BNCC não deve ser entendido como o currículo escolar. A Base tem como propósito orientar a elaboração do currículo.

Qualquer que seja a habilidade especificada em um determinado ano de escolarização, não deve ser entendido que essa habilidade deva ser construída “naquele ano”, mas sim “até aquele ano”. Isso significa que o processo de construção do conhecimento começa a ser desenvolvido em anos anteriores e vai sendo aprimorado e consolidado ao longo do processo.

É igualmente importante salientar que o desenvolvimento das habilidades não significa que as competências especificadas na BNCC serão automaticamente desenvolvidas. As competências dependem das habilidades, mas não só delas. O desenvolvimento das competências depende também da dinâmica de aula vivenciada pelos alunos e das conexões que eles conseguem estabelecer com outras áreas de conhecimento e com as situações que vivem cotidianamente.



# 2

## Formas para desenvolver o pensamento aritmético

---

A construção do sentido de número, a elaboração de estratégias pessoais de cálculo, o desenvolvimento da habilidade de fazer cálculos mentais e o domínio com significado dos algoritmos convencionais das quatro operações são eventos inseparáveis para que a aprendizagem matemática seja consolidada. Portanto, todos esses eventos são importantes.

### 2.1) Estimular a diversificação de estratégias por meio das “Conversas numéricas”

Romper com o ensino da Matemática como sendo um conjunto de regras a serem memorizadas e aplicadas na resolução de problemas é um dos principais objetivos contemporâneos da Educação Matemática. Para atingir esse objetivo, um dos caminhos mais profícuos é a elaboração de diferentes estratégias pelos alunos para a resolução de problemas. Conversas numéricas têm o propósito de permitir que os próprios alunos atribuam sentido a seus próprios pensamentos matemáticos.

Para isso, os alunos devem ser capazes (construir essa competência) de explicar o que pensam em vez de esperar que lhes expliquemos. Ou seja, devem deixar para trás a cultura de que é o professor o responsável pelas explicações. Explicar o que pensam significa explicar o porquê de suas escolhas e não apenas o como resolveram os problemas; significa reconhecer que os erros e sua superação são partes importantes do processo, e ainda que resposta já não é o que mais importa. Por isso, as normas centrais que devem ser respeitadas na sala de aula são:

- Há muitas maneiras de ver ou resolver qualquer problema.
- Todos são responsáveis por comunicar seu pensamento claramente, para que os outros possam entendê-lo.
- Todos são responsáveis por tentar entender o pensamento das outras pessoas.

Nesse sentido, a proposta de estabelecer “Conversas numéricas”, feita por Humphreys e Parker (2019), é uma estratégia de ensino significativamente adequada para o cumprimento desse objetivo.

Segundo essas autoras, “algo maravilhoso acontece quando os alunos aprendem que podem dar sentido à matemática a partir de suas próprias estratégias, apresentar argumentos matematicamente convincentes e criticar e se basear nas ideias dos seus colegas”. (HUMPHREYS e PARKER, 2019)

Essas autoras apresentam algumas orientações que podem ajudar o professor a incorporar essa estratégia de ensino em sua prática docente:

1. Os alunos devem guardar papéis e lápis e colocar os punhos discretamente sobre o peito para mostrar ao professor que estão prontos. Esse procedimento ajuda os alunos a desviarem a atenção da escrita e a pensarem individualmente.
2. O professor apresenta o problema para a classe toda. Toda proposta deve ser feita para se distanciar de algoritmos convencionais. O importante é buscar a diversidade de formas de solução.
3. O professor deve observar seus alunos durante a resolução mental do problema. É importante dar ao aluno o tempo necessário e desmitificar a ideia de que um bom aluno de matemática é aquele que resolver com precisão e rapidez. O bom aluno de matemática é aquele que pensa no processo. Para controle do tempo, o professor deve solicitar a seus alunos que façam um sinal com o polegar, indicando que chegaram à solução.
4. Quando o professor entender que uma quantidade de alunos já chegou à solução (nem todos precisam ter cumprido a tarefa), pode solicitar aos alunos que a compartilhem. As soluções são registradas na lousa pelo professor, que sempre deve perguntar se há alunos que desejam compartilhar formas diferentes de resolução. Durante esses registros, os alunos não precisam fazer qualquer manifestação sobre a adequação ou não dos processos ou resultados. A pergunta “quantos alunos concordam com as soluções” não tem espaço nessa estratégia.
5. Quando o número de respostas diferentes estiver adequado ou não existirem outras, o professor deve verificar se alguém se coloca à disposição para explicar a forma pela qual o problema foi resolvido. Essa explicação não deve se limitar à descrição dos procedimentos. É necessário atribuir significado ao processo apresentado, explicando o porquê ele faz sentido. Perguntas como “quem tem uma estratégia e está disposto a compartilhar?” ou “alguém está disposto a nos convencer de que sua resposta faz sentido, contando-nos o que fez?” podem encorajar a participação dos alunos.
6. Durante o compartilhamento de suas estratégias, os alunos inicialmente identificam qual resposta estão defendendo e o professor registra cada uma das estratégias apresentadas.

7. Como o principal objetivo é estimular o aluno a se comunicar de forma mais clara, enfatizando as particularidades de sua estratégia, o professor deve lançar perguntas que o ajudem nessa comunicação. Perguntas como “alguém gostaria de fazer alguma pergunta?”, “você poderia falar mais sobre essa parte de seu pensamento”, “alguém poderia explicar de outra forma, com suas próprias palavras, essa estratégia apresentada?”, “que conexões vocês percebem entre as estratégias que discutimos?” podem ajudar nessa dinâmica.
8. Essa estratégia de estabelecer “Conversas numéricas” normalmente não termina em 15 minutos, mas às vezes o professor deve permitir essa extensão do tempo. Mas, em geral, é necessário encerrar nesse tempo, requerendo um cuidado especial do professor para encerrar a atividade, mesmo quando ainda há alunos desejando compartilhar suas estratégias.

Humphreys e Parker apresentam também os princípios para o estabelecimento adequado das “Conversas numéricas”:

1. Todos os alunos têm ideias matemáticas que valem a pena ser ouvidas e o trabalho do professor é contribuir para que eles aprendam a desenvolver e a expressar essas ideias com clareza.
2. As perguntas dos professores são o meio que eles têm para entender o pensamento dos alunos.
3. O professor deve encorajar seus alunos a explicarem seu pensamento de modo conceitual, em vez de procedimental.
4. Os erros proporcionam oportunidades de examinar ideias que, de outra forma, não seriam consideradas.
5. Embora a eficiência seja um objetivo, a eficiência de uma estratégia reside no pensamento e no entendimento individual de cada aluno.
6. Um ambiente de aprendizagem é aquele onde todos os alunos se sentem seguros em compartilhar suas ideias matemáticas.
7. Um dos nossos objetivos mais importantes é ajudar os alunos a desenvolverem sua prática social e matemática.
8. A compreensão matemática se desenvolve com o tempo.
9. Confusão e dificuldades são partes naturais, necessárias e até mesmo desejáveis da aprendizagem da matemática.
10. A diversidade de ideias deve ser valorizada e encorajada.

## 2.2) O uso de jogos

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontavam o jogo como uma das quatro formas de fazer matemática. Usar o jogo como uma estratégia é uma potente forma que o professor tem para que os alunos possam aprender na interação entre si mesmos.

Obviamente, o jogo deve ser escolhido em função da aderência existente entre suas características e o objetivo pedagógico definido pelo professor.

São muitos os benefícios do jogo na sala de aula, mas dentre eles, além de sua característica dinâmica, está a criação de oportunidades para os alunos aplicarem e desenvolverem o cálculo mental, o raciocínio lógico matemático e a criatividade.

### O recurso aos jogos

#### Parâmetros curriculares nacionais – Matemática (1996)

Além de ser um objeto sociocultural em que a matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle.

No jogo, mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se o autoconhecimento — até onde se pode chegar — e o conhecimento dos outros — o que se pode esperar e em que circunstâncias.

Para crianças pequenas, os jogos são as ações que elas repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercício), isto é, são fonte de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema. Essa repetição funcional também deve estar presente na atividade escolar, pois é importante no sentido de ajudar a criança a perceber regularidades.

Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações.

O departamento de Matemática da Unesp disponibiliza um conjunto muito seletivo de jogos que podem ser acessados pelo link:

<https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/>



Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações.

Em estágio mais avançado, as crianças aprendem a lidar com situações mais complexas (jogos com regras) e passam a compreender que as regras podem ser combinações arbitrárias que os jogadores definem; percebem também que só podem jogar em função da jogada do outro (ou da jogada anterior, se o jogo for solitário). Os jogos com regras têm um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda.

A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver.

### 2.3) A indesejada memorização de fatos matemáticos sem significado

A memorização dos fatos matemáticos indiscutivelmente traz celeridade ao processo de cálculo, seja ele escrito ou mental. No entanto, tal memorização não é primordial, e é até mesmo indesejada se for feita de forma mecânica, sem atribuição de significado às relações numéricas neles presentes.

Jo Boaler (2018) traz o depoimento que explicita o quanto a memorização de fatos matemáticos pode impactar diferentemente na vida das pessoas.

*Em uma recente oficina de desenvolvimento profissional que realizei com professores da Califórnia, revelei o fato de que não decorei a tabuada de multiplicação quando era criança. Também contei que isso nunca me prejudicou em nenhum aspecto, ou em qualquer época, apesar de me envolver e trabalhar com matemática diariamente. Quando falei sobre isso para a sala repleta de professoras, quatro delas choraram. No almoço, uma delas me explicou, entre soluços, que essa declaração havia mudado tudo para ela. Quando criança, tivera dificuldade para memorizar a tabuada, e seu pai lhe passou a ideia de que tinha algum tipo de deficiência. Durante toda sua vida, sentiu que havia algo de errado com ela. Contou-me que o diretor de sua escola estava com ela na sessão, temera que sua “deficiência” pudesse ser exposta. O número de pessoas prejudicadas pela ênfase aos testes cronometrados e memorização de fatos matemáticos nas escolas é assustadoramente grande. (p. 39)*

Candido (2019), nas notas de aula de um de seus cursos de formação, sugere a leitura do seguinte texto de sua autoria.

#### O cérebro e o senso numérico

Alguns alunos não têm tanta habilidade para memorizar fatos matemáticos quanto outros. Isso é algo a ser celebrado, pois faz parte da maravilhosa diversidade da vida e das pessoas. Imagine o quanto seria chato e pouco inspirador se os professores dessem testes de matemática e os alunos os respondessem da mesma forma e com a mesma velocidade, como se fossem robôs. Em um estudo recente, os cientistas examinaram o cérebro dos estudantes enquanto eles eram ensinados a memorizar fatos matemáticos e perceberam que alguns alunos os memorizavam com muito mais facilidade do que outros. Isso não será surpresa alguma para os leitores, e muitos de nós provavelmente presumiríamos que aqueles que memorizavam melhor eram os alunos de alto aproveitamento, ou os “mais inteligentes”.

Contudo, os pesquisadores descobriram que os alunos que memorizavam com mais facilidade não eram os de alto rendimento, pois não tinham o que eles descreveram como mais “habilidade matemática”, tampouco tinham coeficiente de inteligência (QI) mais alto (SUPEKAR et al, 2013). A única diferença que os pesquisadores descobriram estava em uma região do cérebro chamada hipocampo, que é a área do cérebro responsável pelos fatos memorizados (idem). Alguns alunos serão mais lentos quando estiverem memorizando, mas ainda terão potencial matemático excepcional. Os fatos matemáticos são parte muito pequena da matemática, mas, infelizmente, os alunos que não os memorizam em geral chegam a acreditar que nunca poderão ter sucesso com a matemática, e afastam-se da matéria.

Nos EUA e Reino Unido, professores pedem aos alunos para memorizar fatos matemáticos e, às vezes, fatos de adição e subtração também, geralmente porque os padrões curriculares especificaram que os alunos precisam ser “mais fluentes com os números”. Parish, baseado em Fosnot e Dolk (2001), define a fluência como “saber de que forma um número pode ser composto e decomposto e usar essa informação para ser flexível e eficiente na resolução de problemas”. (PARISH, 2014, p. 159)

Independentemente de acreditarmos ou não que a fluência exige mais do que lembrar fatos matemáticos, as pesquisas apontam que desenvolver o senso numérico e trabalhar com números de formas diferentes, em vez de memorizar cegamente, sem senso numérico, são as melhores maneiras de fortalecer a fluência com os números.

Quando os professores enfatizam a memorização dos fatos, e dão testes para medir fatos numéricos, os alunos sofrem de duas formas importantes. Para cerca de um terço deles, a introdução dos testes cronometrados representa o começo da ansiedade matemática (BOALER, 2014). Sian Beilock e seus colegas estudaram o cérebro humano por meio de ressonância magnética e descobriram que os fatos matemáticos ocorrem na seção em que a memória opera no cérebro. Mas quando os alunos estão estressados, como em situações nas quais estão respondendo a perguntas de matemática sob a pressão do tempo, o funcionamento da memória sofre um bloqueio e os alunos não conseguem acessar os fatos que sabem (BEILLOCK, 2011; RAMIREZ et al, 2013). À medida que os alunos percebem que não conseguem se sair bem em testes cronometrados, começam a ficar ansiosos e sua confiança na matemática é corroída. O bloqueio do funcionamento da memória e a ansiedade ocorrem particularmente entre as garotas e os alunos de aproveitamento mais alto. Estimativas conservadoras indicam que, pelo menos, um terço dos alunos passa por situações de estresse extremo em testes cronometrados, e estes não são alunos que fazem parte de um grupo de aproveitamento ou contexto econômico específico.

Quando os submetemos a experiências que geram ansiedade, os alunos fecham as portas para a matemática. A ansiedade matemática tem sido registrada em alunos a partir dos 5 anos de idade (RAMIREZ et al, 2013) e os testes cronometrados são a maior causa dessa condição debilitante, que às vezes dura por toda a vida.

Mas existe uma segunda razão igualmente importante contra os testes cronometrados: eles levam muitos alunos a rejeitar a matemática. Em minhas aulas na Universidade de Stanford, convivo com muitos estudantes de graduação traumatizados com a matemática, apesar de estarem entre os alunos de mais alto aproveitamento do país. Quando pergunto o que lhes causou tal aversão, muitos apontam os testes cronometrados no segundo ou terceiro ano como um importante ponto de virada, influenciando sua decisão de que a matemática não era para eles. Alguns desses alunos, principalmente as mulheres, relataram a necessidade de entender com profundidade, o que é um objetivo muito válido, e a sensação de que essa compreensão aprofundada não era valorizada ou oferecida quando os testes cronometrados se tornaram parte da aula de matemática. Eles poderiam ter feito um trabalho mais valioso em suas aulas de matemática, focando na obtenção do sentido e na compreensão, mas os testes cronometrados evocam emoções tão fortes que os alunos podem vir a acreditar que a essência da matemática está baseada em ser rápido em fatos matemáticos. Isso é extremamente lamentável. Vemos o resultado dessa ênfase equivocada na memorização e aplicação de testes no número de alunos que estão desistindo da matemática e nas crises da matemática que hoje enfrentamos. Quando minha filha começou a decorar tabuadas e a fazer testes aos 5 anos de idade na Inglaterra, ela voltou a chorar quando retornava para casa, por causa da matemática. Essa não é a emoção que desejamos que os alunos associem à disciplina e, enquanto continuarmos a colocar os alunos sob pressão para que se lembrem de fatos rapidamente, não eliminaremos a ansiedade disseminada e o desgosto pela matemática que permeiam os EUA e o Reino Unido (SILVA; WHITE, 2014; NATIONAL NUMERACY, 2014).

Nos últimos anos, os pesquisadores do cérebro descobriram que os alunos que se saem melhor com problemas numéricos são aqueles que usam diferentes rotas cerebrais – uma que seja numérica e simbólica e outra que envolva mais o raciocínio intuitivo e espacial (PARK, BRANNON, 2013). Ao fim deste artigo, oferecemos muitas atividades que estimulam a compreensão visual dos fatos numéricos, para ativar importantes conexões cerebrais. Além disso, os pesquisadores do cérebro analisaram duas maneiras nas quais os alunos estavam aprendendo fatos matemáticos – por meio de estratégias e da memorização. Eles descobriram que as duas abordagens (estratégias ou memorização) envolvem dois caminhos distintos no cérebro e que ambos podem perfeitamente ser usados ao longo da

vida. É importante ressaltar, contudo, outra descoberta do estudo: os sujeitos que aprenderam por meio de estratégias alcançaram um “desempenho superior” em relação aos que aprenderam pela memorização; eles resolveram os problemas com a mesma rapidez, e mostraram uma melhor transferência para novos problemas. Assim, os pesquisadores do cérebro concluíram que a automaticidade deve ser alcançada por meio da compreensão das relações numéricas, que, por sua vez, é alcançada por meio do raciocínio acerca das estratégias numéricas. (DELAZER et al, 2005)

Fonte: Notas de aula da pedagoga Patrícia Cândido.

## **2.4) A compreensão dos algoritmos convencionais e de outras culturas**

O desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo chega a tornar desnecessário o conhecimento dos algoritmos convencionais. Exemplos claros dessa assunção pode ser notada em cursos de educação de jovens e adultos que estão em processo de alfabetização.

Nesses cursos, muitas vezes observa-se que os alunos ali presentes, que não sabem sequer ler e escrever, fazem as operações aritméticas com grande destreza e são até mesmo capazes de explicar os procedimentos que usam para efetuar as operações.

Esses alunos, diante de professores que pretendem ensinar os algoritmos convencionais, fazem a pergunta: “porque aprender desse jeito se a minha forma de fazer é melhor?”

Neste trabalho, o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo escrito e mental é valorizado pelas potencialidades que estas têm de dar significado às operações. Nele, são também valorizados os processos de significação dos algoritmos convencionais, uma vez que eles são usados de forma recorrente.

A valorização desses dois processos é importante para desmitificar a ideia de que os algoritmos convencionais são mera aplicação de regras prontas e acabadas, e assim colocá-los como mais uma estratégia para desenvolver operações aritméticas, sem perder de vista de que se tratam de algoritmos que vêm sendo historicamente consolidados e divulgados nos âmbitos nacional e internacional.

Ou seja, apesar de também valorizado, o ensino dos algoritmos convencionais tem a finalidade de também atribuir significado à operação, sendo considerado mais uma estratégia de cálculo.



# 3

## Introdução aos procedimentos de cálculo

---

Nesta fase, quando se pretende introduzir a exploração das técnicas operatórias, chegando aos algoritmos convencionais, não convencionais e de cálculo mental, os estudantes devem ter passado pela construção dos conceitos intrínsecos ao Sistema de Numeração Decimal (SND).

Ao desenvolver as técnicas operatórias esses conceitos são consolidados, porque são retomados e aplicados nas mais diversas formas do raciocínio aritmético. Certamente a ideia da adição (com seus dois significados) já deve também ter sido aplicada na construção desses conceitos do SND com o uso dos diversos recursos didáticos, mas deve ser retomada para sua melhor sistematização.

Da mesma maneira, os estudantes devem ter passado por experiência que lhes permitiu usar o material dourado para desenvolver os conceitos de trocas de 10 unidades por 1 dezena, de 10 dezenas por 1 centena e, talvez, de 10 centenas por 1 milhar. Devem ter passado também por experiências que os levaram a fazer a decomposição de 1 dezena em 10 unidades, de 1 centena em 10 dezenas e, talvez, de 1 milhar por 10 centenas. Para efetuar essas trocas, os procedimentos são facilmente assimilados pelos estudantes, mas o importante é garantir que eles consigam visualizar a correspondência entre esses valores.

É algo que parece simples, mas não é. Afinal, “como 1 pode ser igual a 10?”, por exemplo. De fato, nesse caso, 1 não é igual a 10, mas sim, 1 dezena tem um valor equivalente a 10 unidades.

Caso os alunos não tenham consolidado essa ideia de equivalência de valores, é de fundamental importância que tenham novas vivências para tal consolidação.

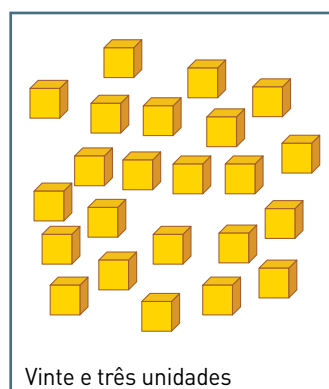
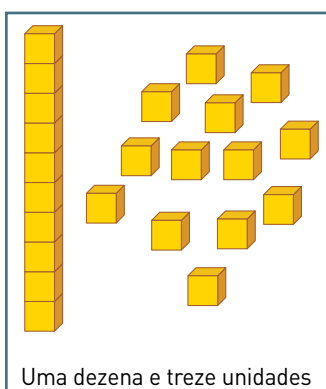
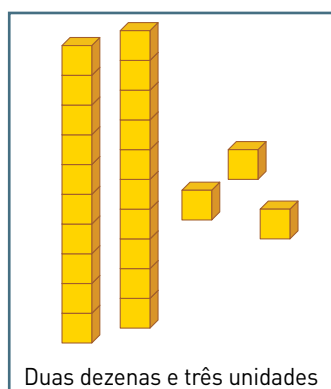
Os recursos didáticos como o material dourado, ábaco de haste (ou semelhante) ou Quadro de Valor Lugar (QVL) ajudam bastante na atribuição das “trocas”, mas o foco especial do professor deve estar em como o aluno opera com os números.

Nacarato (2005)<sup>4</sup> faz um alerta quanto ao uso dos recursos didáticos, já que os professores incorporam um discurso das potencialidades e necessidade dos materiais manipulativos, pois tornam concretos alguns conceitos abstratos. No entanto, o fazem sem a devida reflexão e crítica sobre o que seria concreto no ensino da Matemática.

*Um dos elementos que dificultam a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados. Para Matos e Serrazina (1996, p. 194), muitos materiais são utilizados pelos professores porque na visão deles – adultos e professores – tais materiais têm relações explícitas com o conceito. “Contudo, não há nenhuma garantia que os alunos vejam as mesmas relações nos materiais que vemos”. Os autores apontam ainda duas características das atividades envolvendo materiais concretos que podem trazer resultados negativos: 1) a distância entre o material concreto e as relações matemáticas a serem representadas; 2) o material “toma as características de um símbolo arbitrário em vez de uma concretização natural” (Hiebert e Carpenter, 1992, apud MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 197); e 2). Muitas vezes, segundo os autores, os professores utilizam os materiais para introduzir uma noção, mas, uma vez se chegando a ela (cálculo, propriedade, algoritmo), já não interessa o contexto no qual o material foi utilizado e passa-se a trabalhar apenas no nível abstrato. (NACARATO, 2005, p. 3.)*

Ainda nesta fase, é importante também que os estudantes tenham clareza na decomposição de números de diferentes formas usando o material dourado, o ábaco e o quadro de valor posicional, como mostram os problemas a seguir:

**De quantas formas diferentes posso representar o número 23 usando o material dourado?**



4 - NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação, v. 9, n. 1, 2005.

**De quantas formas diferentes posso representar o número 23 usando o ábaco de haste?**



**De quantas formas diferentes posso representar o número 23 usando o quadro de valor posicional?**

| C                            | D | U |
|------------------------------|---|---|
|                              |   |   |
|                              | 2 | 3 |
| Duas dezenas e três unidades |   |   |

| C                           | D | U  |
|-----------------------------|---|----|
|                             |   |    |
|                             | 1 | 13 |
| Uma dezena e treze unidades |   |    |

| C                     | D | U  |
|-----------------------|---|----|
|                       |   |    |
|                       |   | 23 |
| Vinte e três unidades |   |    |

Essas habilidades, que permitem agrupar e decompor números de maneira que tenham significado para os estudantes, são essenciais para o desenvolvimento de algoritmos, sejam eles escritos ou de cálculo mental.

Aqui é importante salientar que se trata de um grande equívoco a situação abaixo, na qual se usa em uma mesma tarefa o material dourado e o quadro de valor posicional.

**Represente o número 23**

| C | D | U |
|---|---|---|
|   |   |   |

O número representado neste quadro é de 2 dezenas e 3 unidades, ou seja, o equivalente a 203 unidades. Trata-se de um equívoco bastante recorrente, porque aqueles que apresentam essa solução estão associando o valor dois, referente a duas barrinhas, mas se esquecem que ali encontram-se 20 unidades, consequentemente, 20 dezenas.

[illegible]

# 4

## Adição com números naturais

---

A adição é provavelmente a operação mais simples de ser ensinada. Mas isso não significa que ela não demanda muitos cuidados do professor em sua abordagem didática com os alunos.

Por ser a operação “abre alas” para o ensino das operações aritméticas, requer atitudes especiais para que o ensino desejado seja profícuo, até mesmo porque muitas vezes precisam ser desconstruídas algumas ideias inadequadas que os alunos trazem de sua experiência na Educação Infantil e, até mesmo, de fora da escola.

Uma das ideias a ser desfeita é a de que operação e algoritmo são sinônimos, trazendo de forma subjacente a existência de uma única forma de se conceber e realizar uma operação aritmética.

Outra ideia inadequada é a de que o domínio de uma técnica operatória é o suficiente na aritmética, resultando em tarefas matemáticas que contenham o enunciado “arme e efetue seguindo os passos apresentados anteriormente”.

Essas ideias são inadequadas porque não permitem a atribuição de significados, impedindo as crianças de compreenderem as razões pelas quais elas usam determinados procedimentos nos algoritmos. Esses cuidados são importantes desde esse início com a operação da adição.

#### 4.1) Problema de enredo envolvendo adição

Em Kamii e Declark (1994, p. 34) temos a seguinte observação:

*Os professores, geralmente, ensinam as crianças a somar e depois lhes dão problemas para resolver. Acredito que os problemas deveriam aparecer concomitantemente com a soma por duas razões?*

*1) As crianças constroem a aritmética a partir de sua própria realidade.*

*2) As pesquisas mostram que problemas narrados com histórias são mais facilmente resolvidos sem a instrução formal.*

*A criança constrói aritmética à medida em que ela aritmetiza logicamente a realidade. “Você tem duas balas e João lhe dá mais duas” é o tipo de realidade em que as crianças constroem seus conhecimentos de  $2 + 2$ . Elas vivem em um mundo de colegas, bicicletas, bolas, patins... e estruturam numericamente as quantidades dentro dessa realidade. Forçá-las a memorizar dois mais dois sem nenhum conteúdo é contrariar a realidade dessas crianças.*

*Quando falo de problemas de enredo, isto é, de problemas narrados, não quero dizer que os problemas devam ser tirados de livros, e sim da própria realidade vivida dentro da sala de aula. Por exemplo, num jogo de 10 perguntas as crianças dizem espontaneamente “só faltam mais duas” quando se chega à oitava pergunta. Um professor familiarizado com a teoria de Piaget entenderia uma observação como essa, e poderia tirar a maior vantagem possível, perguntando, por exemplo: “como é que vocês sabem que só faltam duas?”, “vocês concordam com eles?”. Numa situação semelhante, quando se chega à quinta ou à sétima pergunta, o professor pode perguntar: “quantas ainda faltam?”. [...] Limito-me a insistir que os problemas narrados deveriam ser dados desde o início do primeiro ano de escolarização, evitando-se que sejam estranhos às crianças. [...]*

*Em geral, pede-se à criança para “aramar” o problema antes de resolvê-lo. Mas os problemas têm de ser pensados sem se usar o lápis.*

#### 4.2) Conversas matemáticas para pensamento aritmético da adição

Humphreys e Parker (2019) apresentam cinco estratégias para desenvolver as “Conversas numéricas”. Como poderá ser notado, uma representação comum é o uso das retas, mas sem a preocupação com escalas, apenas mantendo uma certa proporcionalidade. Essas retas abertas não podem ser confundidas com retas numéricas (presentes na atual BNCC), cuja escala deve ser considerada.

### 1. Arredondar e ajustar.

“Arredondei 28 para 30. Então somei 30 e 63 e obtive 93. Depois tirei o 2 extra que havia acrescentado e obtive 91.”

$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ 63 + 30 = 93 \\ 93 - 2 = 91 \end{array}$$

### 2. Tirar e dar.

“Tirei 2 de 63 e dei para o 28, então montei o problema  $61 + 30$ ; depois somei 61 e 30 e obtive 91.”

$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ \quad \quad \quad \begin{array}{c} +2 \\ \curvearrowright \end{array} \\ 63 + 28 \\ 61 + 30 = 91 \end{array}$$

### 3. Começar pela esquerda.

“Somei 60 e 20 e obtive 80, então somei 3 e 8 e obtive 11; depois somei 80 e 11 e obtive 91.”

$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ 60 + 20 = 80 \\ 3 + 8 = +11 \\ \hline 91 \end{array}$$

### 4. Decompor uma das parcelas.

1ª maneira: “Somei 63 e 20 e obtive 83; então adicionei 8 e obtive 91.”

$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ 63 + 20 = 83 \\ \quad \quad \quad + 8 \\ \hline 91 \end{array}$$

2ª maneira: “Somei 60 e 28 e obtive 88; depois acrescentei mais 3 e obtive 91.”

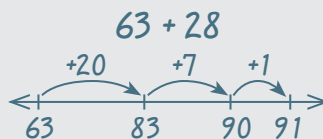
$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ 60 + 28 = 88 \\ \quad \quad \quad + 3 \\ \hline 91 \end{array}$$

3ª maneira: “Somei 63 e 20 e obtive 83; então tirei 7 do 8 e dei para o 83, e isso resultou em 90, então tudo o que eu tinha a fazer era somar 90 mais 1, e obtive 91.”

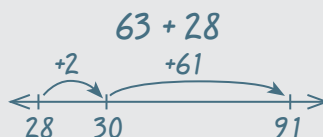
$$\begin{array}{l} 63 + 28 \\ 63 + 20 = 83 \\ \quad \quad \quad \begin{array}{c} +7 \\ \curvearrowright \end{array} \\ 83 + 8 = 90 + 1 = 91 \end{array}$$

### 5. Adicionar.

1ª maneira: “Comecei com 63, então adicionei 20 para chegar a 83; depois acrescentei mais 7 para chegar a 90; então adicionei o 1 que foi deixado para chegar a 91.”



2ª maneira: “Comecei com 28 e adicionei 2 para chegar a 30; então somei 61 e obtive 91.”



### 4.3) Estratégias para desenvolvimento dos fatos aditivos propostos por Walle (2009)

A seguir encontram-se quatro de algumas estratégias para desenvolver os fatos aditivos propostos por Van de Walle (2009):

#### ► Fatos “um a mais” e “dois a mais”

Cada um dos 36 fatos destacados na figura ao lado significa que é a soma por um ou por dois. O desenvolvimento dessa coleção de fatos permite a consolidação do senso numérico.

- Dica da atividade proposta por Walle (2009, p. 194):

#### Dados de “um a mais” e “dois a mais”

Faça um dado etiquetado com +1, +2, +1, +2, “mais um” e “mais dois”. Use um outro dado etiquetado com 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Após cada lançamento dos dois dados, as crianças devem dizer o fato completo: “Quatro mais dois é seis.”

| + | 0 | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  |
|---|---|----|----|---|---|---|---|---|----|----|
| 0 |   | 1  | 2  |   |   |   |   |   |    |    |
| 1 | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| 2 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 |   | 4  | 5  |   |   |   |   |   |    |    |
| 4 |   | 5  | 6  |   |   |   |   |   |    |    |
| 5 |   | 6  | 7  |   |   |   |   |   |    |    |
| 6 |   | 7  | 8  |   |   |   |   |   |    |    |
| 7 |   | 8  | 9  |   |   |   |   |   |    |    |
| 8 |   | 9  | 10 |   |   |   |   |   |    |    |
| 9 |   | 10 | 11 |   |   |   |   |   |    |    |

#### ► Fatos com zero

Há 19 casos em que os fatos da adição têm o zero como uma das parcelas. Apesar de serem fatos aditivos fáceis, requerem um cuidado especial para sua adequada significação, uma vez que é estranho somar algo com zero. Situações cotidianas precisam ser criadas para atribuir significado. Além disso, esses fatos aditivos trazem uma propriedade importante da adição de números, em que a soma de qualquer número com zero resulta nele mesmo. É a propriedade do elemento neutro.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 7 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8 | 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9 | 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

- Dica da atividade proposta por Walle (2009, p. 195):

#### O que é semelhante? Fatos do zero

Escreva cerca de dez fatos de zero no quadro, alguns com o zero primeiro e alguns com o zero em segundo. Discuta como todos esses fatos são semelhantes. Peça que as crianças usem contadores e um tabuleiro de parte-todo para modelar os fatos em suas carteiras.

### ► Dobros

Estes 10 fatos aditivos são também fáceis e possuem uma certa aproximação com a multiplicação por dois (que ainda não deve ser explorada). Deve ser explorada porque será usada como fundamento na próxima estratégia. Outra possibilidade de trabalho bastante potente com esses fatos consiste na visualização desses fatos como uma sequência numérica, na qual um número é obtido com a soma de duas unidades ao número anterior.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 1 |   | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 2 |   |   | 4 |   |   |    |    |    |    |    |
| 3 |   |   |   | 6 |   |    |    |    |    |    |
| 4 |   |   |   |   | 8 |    |    |    |    |    |
| 5 |   |   |   |   |   | 10 |    |    |    |    |
| 6 |   |   |   |   |   |    | 12 |    |    |    |
| 7 |   |   |   |   |   |    |    | 14 |    |    |
| 8 |   |   |   |   |   |    |    |    | 16 |    |
| 9 |   |   |   |   |   |    |    |    |    | 18 |

- Dica da atividade proposta por Walle (2009, p. 195):

#### Calculadora de dobrar

Use a calculadora e digite a “máquina de duplicar”  $2 \times =$ . Deixe uma criança dizer, por exemplo, “sete mais sete”. A criança deve teclar 7, tentar dizer o dobro (14) e então teclar = para ver o dobro correto na tela.

(Note que a calculadora também é um bom caminho para praticar fatos “+1” e “+2”)

### ► Dobros mais um

Estes 9 fatos aditivos podem ser vistos como sendo resultado da soma de duas parcelas iguais a uma unidade. Para determinar o resultado dessa estratégia, basta dobrar a menor das parcelas e somar um.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 0 |   | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    |
| 1 | 1 |   | 3 |   |   |    |    |    |    |    |
| 2 |   | 3 |   | 5 |   |    |    |    |    |    |
| 3 |   |   | 5 |   | 7 |    |    |    |    |    |
| 4 |   |   |   | 7 |   | 9  |    |    |    |    |
| 5 |   |   |   |   | 9 |    | 11 |    |    |    |
| 6 |   |   |   |   |   | 11 |    | 13 |    |    |
| 7 |   |   |   |   |   |    | 13 |    | 15 |    |
| 8 |   |   |   |   |   |    |    | 15 |    | 17 |
| 9 |   |   |   |   |   |    |    |    | 17 |    |

- Dica da atividade proposta por Walle (2009, p. 196):

#### Dados de dobro mais um

Os estudantes lançam um único dado com números ou conjuntos de pontos. Sua tarefa é dizer a soma do número mostrado mais o número seguinte. Isto é, para 7, os estudantes devem dizer: “sete mais oito é quinze”.

A memorização dos fatos fundamentais da adição (assim como das demais operações aritméticas) tem sua importância para a agilidade do cálculo, seja ele mental ou escrito. Mas, mais uma vez, é necessário destacar que a preocupação deve estar em estabelecer os registros, como representação dos pensamentos. A importância dos fatos está mais no processo de elaboração das estratégias do que no processo de memorização, sendo que o segundo deve ser uma decorrência desejável do primeiro.

#### 4.4) Procedimentos para a soma de parcelas com um algarismo

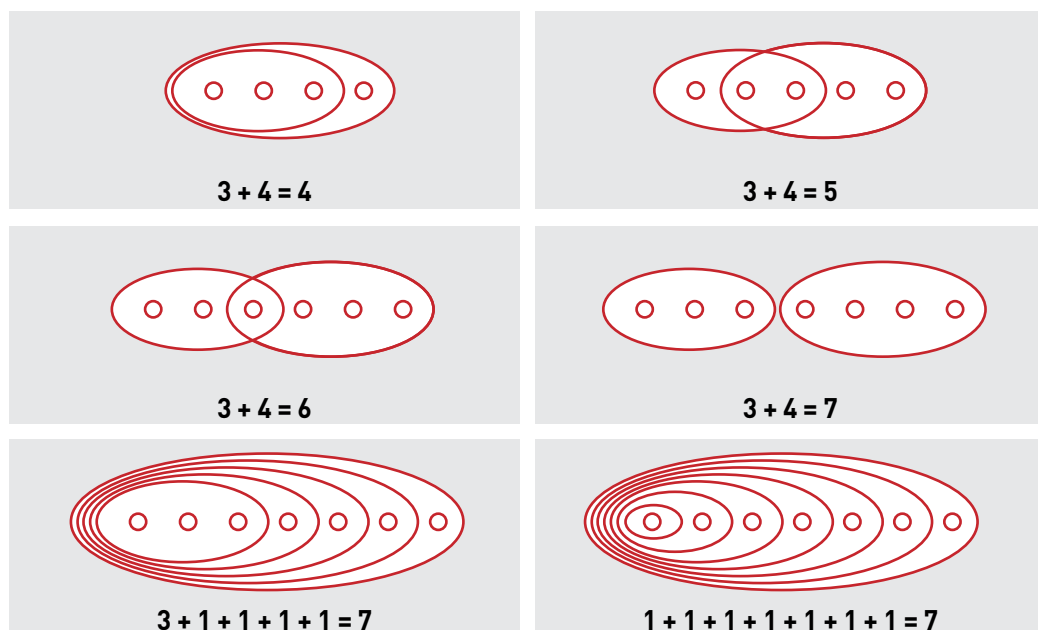
Apesar desta operação ser uma das mais simples, por envolver a operação da adição e ser composta por parcelas de um algarismo, requer muita atenção e cuidado por abrir o campo da construção de algoritmos. E certamente as crianças, nesta fase da escolarização, trazem experiências e conhecimentos anteriores, sobretudo por conta a construção do Sistema de Numeração Decimal.

Em geral, os professores colocam como objetivo dessa fase da escolarização a memorização dos fatos fundamentais da adição, isto é, espera-se que os alunos memorizem as somas de dois números menores que dez.

No entanto, fazer com que as crianças adicionem números usando seu próprio raciocínio e forma de representação deve ser o objetivo maior desses professores. Segundo Kamii e Declark:

*A criança que usa sua própria capacidade de pensar aprende adição por conta própria e se torna confiante em sua própria capacidade de calcular. Quando ela pode, desse modo, “inventar a aritmética”, não há nada de misterioso nessa matéria. Aritmética tradicional, ao contrário, reforça a heteronomia natural da criança diante de uma professora que decide quais os fatos a serem aprendidos, quando, como e quais são as respostas corretas. (1994, p. 101)*

Ainda segundo essas autoras, se o aluno não sabe o que fazer, ele não está no momento de trabalhar com a adição. A seguir é usada uma representação de alguns raciocínios possíveis de serem usados pelos alunos para efetuarem a adição entre 3 e 4.



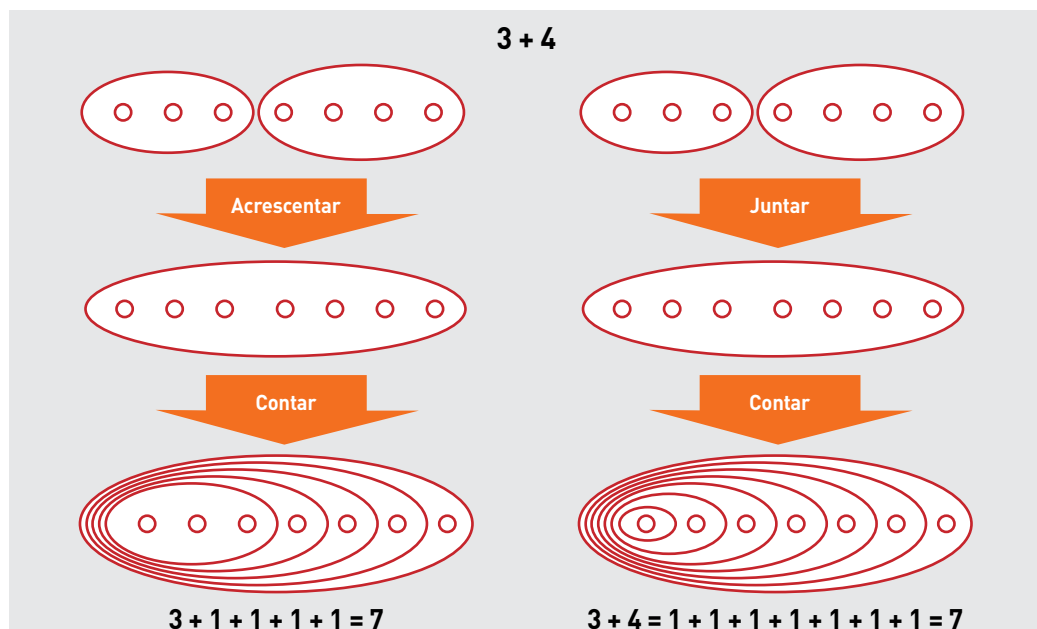
Como pode ser percebido nessas imagens, o uso de diferentes estratégias pode levar a resultados adequados ou inadequados. Tanto em um caso como em outro, o tratamento a ser dado pelo professor deve ser individualizado, e não se limitar a afirmar a adequação ou inadequação dos resultados ou dos processos (estratégias, raciocínio, procedimentos).

Tal atitude requer do professor a escuta atenta e a manutenção dos registros das estratégias e resultados para serem debatidos entre os alunos. Esse debate é um processo de validação dessas estratégias e resultados a ser feito pelos próprios alunos, individual ou coletivamente, devidamente mediado pelo professor.

Para essa mediação, o professor precisa atribuir significado às produções e comentários dos alunos, para que ele possa fazer as intervenções adequadas. Por sua vez, essa atribuição de significados requer do professor um conhecimento interpretativo (RIBEIRO, MELLONE e JAKOBSEN, 2013). Para Jaworski (1994), essa atitude do professor é percebida pelos alunos, pois é ela que revela o seu interesse e o cuidado com o aluno e sua própria abordagem da matemática e do pensamento matemático de seus alunos. O entusiasmo inerente a essa atitude influencia a autoestima dos alunos e seu enfrentamento diante das tarefas mais desafiadoras.

Esse processo de interação entre os próprios alunos e entre os alunos e o professor, diante da diversidade de estratégias e representações, fará com que os alunos desenvolvam a capacidade de criar estratégias e, além disso, possam dominar os fatos fundamentais da adição, ou seja, respondam rapidamente a determinadas situações sem recorrer à contagem.

Na fase inicial, a ideia de somar 3 com 4, segundo Kamii (1995), pode ter os seguintes raciocínios.

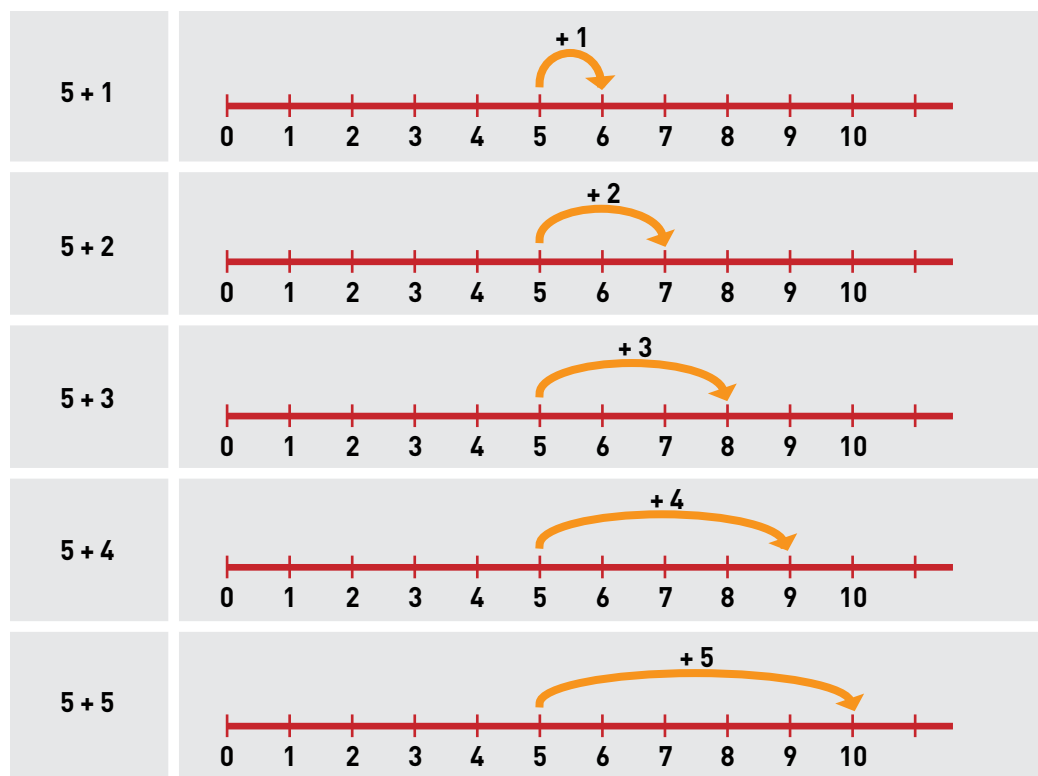


Nesta etapa, os recursos didáticos necessários limitam-se aos de contagem e sua representação escrita. Baseadas em pesquisas, Kamii e Declark (1994) sugerem que é adequada a exploração dessas somas na seguinte sequência:

- 1) Somar parcelas até 4.
- 2) Somar parcelas até 6.
- 3) Somar duas parcelas iguais.
- 4) Encontrar as somas que resultam em 10 (para despertar a comutatividade da soma, o resultado  $2 + 8$  é igual ao resultado de  $8 + 2$ , apesar de terem significados diferentes).
- 5) Desenvolver o pensamento que 6, 7, 8 e 9 são  $5+1$ ,  $5+2$ ,  $5+3$  e  $5+4$  (porque os alunos tendem a fazer agrupamentos posteriores, em diferentes algoritmos, em torno dos múltiplos de 5).

Para o desenvolvimento desse agrupamento a partir do 5, um recurso adequado, valorizado na BNCC, é a reta numérica. Trata-se de outra forma de representação, que ajuda na visualização e no cálculo mental.

A forte conexão existente entre a construção da reta numérica e a medida não deve ser explorada agora, mas suas noções podem ser usadas. Por isso, a origem (zero) deve ser construída com a associação de quantidade, assim como a equidistância entre cada um dos pontos.



Para finalizar esta sequência de ensino com somas de parcelas com um algarismo, devem ser solicitadas somas que resultem em valores maiores que 10, também obtidos por contagem. Nesse momento, como a soma de duas parcelas com um algarismo pode resultar até o número 19, as duas representações com material dourado (uma com a peça que representa a dezena e outra somente com unidades) podem ser retomadas a partir do que foi trabalhado no Sistema de Numeração Decimal.

Esta situação se limitará à troca de dez unidades por uma dezena, quando estiver sendo trabalhado com material dourado, ábaco de haste ou Quadro de Valor Posicional. No entanto, como esses recursos didáticos não são centrais nesta etapa, esse contexto será explorado mais adiante.

#### 4.5) Procedimentos para a soma de duas parcelas de dois algarismos cada sem trocas

Ensinar os alunos a resolverem um problema no qual precisem somar 12 a 13 poderia ser considerado fácil, se fosse o suficiente mostrar-lhes que bastaria somar os algarismos de cada uma das parcelas pertencentes à mesma coluna.

O diagrama mostra a adição  $25 + 34 =$  alinhada verticalmente. O número 25 está no topo, com o 2 na coluna das dezenas e o 5 na das unidades. Abaixo dele, com um sinal de mais (+), está o número 34, também alinhado: o 3 na coluna das dezenas e o 4 na das unidades. Uma linha horizontal separa os números da linha de resultado. À esquerda da adição, o resultado parcial  $25 + 34 =$  é escrito. À direita, duas setas azuis apontam para cima, uma para a coluna das dezenas e outra para a das unidades, com o rótulo "Colunas" no topo.

Mas, segundo Kamii e Declark (1994), este procedimento não garantiria que os alunos fizessem relação entre este procedimento com o que fariam para somar 12 com 13.

Os procedimentos adotados pelos alunos diante desse problema seria juntar 12 com 13 e fazer uma contagem, uma a uma, que resultaria em 25 ou seria partir de 12 e ir somando 1 treze vezes (acrescentando), chegando como resultado ao número 25.

Para que essa relação seja construída pelos alunos é necessário que eles compreendam a decomposição de cada uma das parcelas em dezenas e unidades.

É hora de lançar mão dos recursos didáticos como material dourado, ábaco de haste e Quadro de Valor Lugar (QVL), e com eles resgatar os conhecimentos construídos na etapa anterior, que tratou do Sistema de Numeração Decimal.

Para desenvolver adequadamente esse algoritmo, os alunos precisam ter os seguintes conhecimentos:

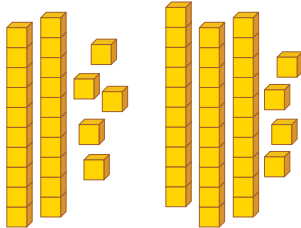
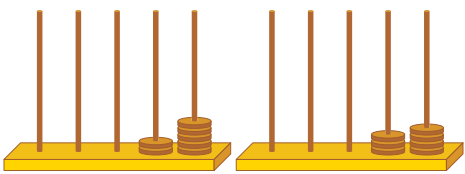
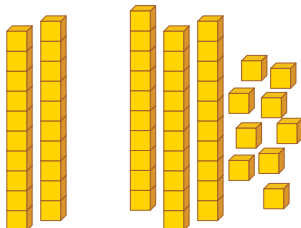
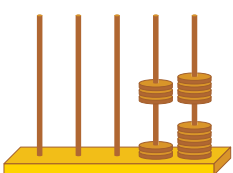
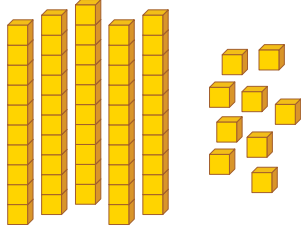
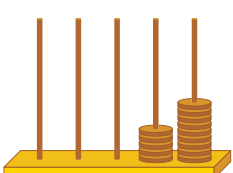
- Representação de cada uma dessas parcelas, usando o menor número de peças de cada um dos recursos didáticos. Esse conhecimento abarca os agrupamentos e as decomposições.
- Estabelecer relações entre o que visualizam nesses recursos didáticos, a representação do que visualizam com esses recursos e a representação usando os algarismos hindu-arábicos.

Uma primeira fase seria dar a seguinte compreensão aos alunos:

| Representação escrita horizontal                                                                                                                        | Representação escrita vertical                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{aligned}  &25 + 34 = \\  &(20 + 5) + (30 + 4) = \\  &20 + 5 + 30 + 4 = \\  &(20 + 30) + (4 + 5) = \\  &(50) + (9) = \\  &59  \end{aligned}  $ |  |

Mas essas representações ainda são insuficientes, uma vez que as referências são apenas unidades. Isto é, as 25 unidades são decompostas em 20 unidades mais 5 unidades, assim como as 34 unidades estão decompostas em 30 unidades mais 4 unidades.

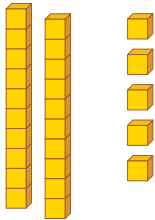
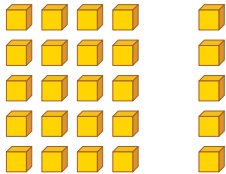
Ainda é necessário que os alunos percebam que as 20 unidades equivalem a 2 dezenas e que 30 unidades equivalem a 3 dezenas. E para isso o uso dos recursos didáticos são adequados.

| Material dourado                                                                    | Ábaco de haste                                                                      | Expressão numérica                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
|    |    | $25 + 34 =$<br>$(20 + 5) + (30 + 4) =$<br>$20 + 5 + 30 + 4 =$ |
|    |    | $20 + 30 + 4 + 5 =$                                           |
|  |  | $(20 + 30) + (4 + 5) =$<br>$(50) + (9) =$<br><b>59</b>        |

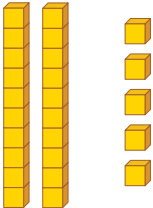
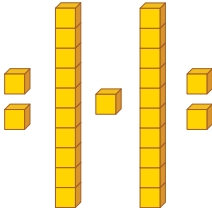
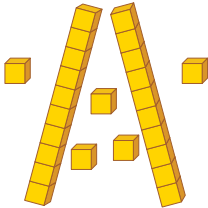
O quadro permite perceber a possível correspondência entre a representação de cada uma das etapas do raciocínio empregado para desenvolver a operação de adição. Além disso, mostra as potencialidades e limitações de cada um dos recursos.

Na primeira linha do quadro anterior, a intenção é mostrar a representação da composição de  $25 + 34$  em  $(20 + 5) + (30 + 4)$ . O uso do material dourado permite a representação de duas dezenas e cinco unidades, mas a representação com numerais hindu-arábicos permite também a leitura de 20 unidades somadas a 5 unidades. Essa dúvida visualização precisa ser trabalhada cuidadosamente com os alunos, para que eles percebam essa diferença na representação.

No quadro a seguir, o aluno deve ter consciência de que a primeira representação é a que utiliza o número de peças.

|        | 2 dezenas e 5 unidades                                                            | 20 unidades somadas a 5 unidades                                                   |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 20 + 5 |  |  |

Outra característica importante do material dourado, e que influencia no ensino, é o fato de ele não ter a preocupação do valor posicional. Como pode ser observado no quadro a seguir, qualquer uma das situações representa o número 25 com o menor número de peças possível.

| 20 + 5                                                                             |                                                                                    |                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |

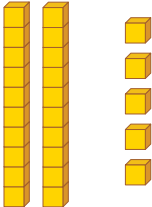
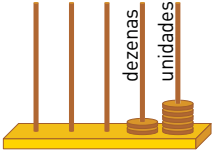
Logo, o material dourado tem sua importância para ajudar na atribuição de significado de agrupamento (troca de 10 unidades por 1 dezena) ou de decomposição (troca de 1 dezena por 10 unidades), como já visto no trabalho com o Sistema de Numeração Decimal.

Após vencida essa etapa das trocas, é recomendado o uso do ábaco de haste e do Quadro de Valor Lugar (QVL), uma vez que a representação usada neles assemelha-se às representações usadas nos algoritmos da adição, sejam eles convencionais ou não, escritos ou não.

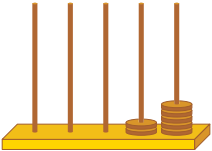
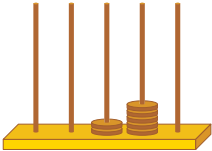
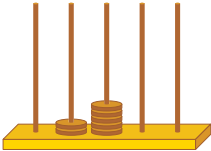
Enquanto no material dourado o aluno visualiza 1 barrinha como sendo 1 dezena, com as 10 unidades equivalentes a ela devidamente representadas, no ábaco de haste o aluno visualizará uma peça, colocada na haste da dezena, mas terá que visualizar que aquela peça, naquela posição, equivale a 10 unidades. O passo mais cuidadoso que deve ocorrer com o ábaco de haste é justamente na troca de 10 peças que valem 1 unidade cada uma por uma única outra, fisicamente idêntica, que assume um valor 10 vezes maior, somente com a mudança de posição.

Por isso, é desejável também que as peças do ábaco de haste tenham cores iguais, uma vez que os alunos podem equivocadamente associar o aumento do valor pela mudança de cor, e não pela mudança de posição.

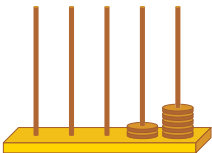
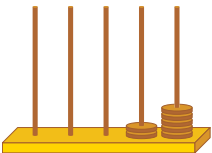
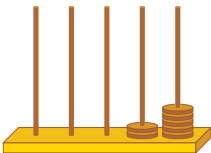
No exemplo do quadro a seguir, a haste que fica mais à direita representa a posição de unidades e a segunda, a posição das dezenas.

| 20 + 5                                                                            |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |

No trabalho com o ábaco de haste, uma ação que deve ser evitada, apesar de comum, é a identificação fixa das posições de Unidade, Dezena e Centena. Recomenda-se apagar essas marcações, normalmente presentes nos ábacos adquiridos no comércio.

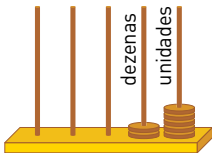
| 20 + 5                                                                                                                          |                                                                                                                                 |                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>haste da dezena<br/>haste da unidade</p> |  <p>haste da dezena<br/>haste da unidade</p> |  <p>haste da unidade<br/>haste da dezena</p> |

É importante que os alunos não tenham essa fixação, pois nas operações com números decimais as unidades serão transformadas em décimos, centésimos e até milésimos, como mostra o quadro a seguir. A relevância desse cuidado está no fato de que uma regra válida em uma etapa da escolarização deve ser válida para todo o processo.

| Diferentes representações de números decimais<br>modificando o valor posicional da haste                  |                                                                                                           |                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2,5</b><br>Dois inteiros e cinco<br>décimos ou<br>vinte e cinco décimos                                | <b>0,25</b><br>Dois décimos e cinco<br>centésimos ou<br>vinte e cinco centésimos                          | <b>0,025</b><br>Dois centésimos e cinco<br>milésimos ou<br>vinte e cinco milésimos                         |
|  <p>haste da unidade</p> |  <p>haste da unidade</p> |  <p>haste da unidade</p> |

O uso do ábaco de haste é relevante enquanto os alunos necessitem fazer trocas de posição para entender mudanças do valor. Uma vez superada essa necessidade, o Quadro de Valor Lugar (QVL) pode ser mais eficiente e eficaz.

A transição do ábaco de haste para o QVL, apresentada no quadro a seguir, ajuda a melhor visualização pelos alunos.

| Representação no<br>ábaco de haste                                                  | Representação no QVL<br>usando objetos de<br>contagem                                                                                                  | Representação no QVL<br>usando os numerais<br>hindu-arábicos |   |   |  |     |         |                                                                                                                                                |   |   |   |  |   |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---|---|--|-----|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|--|---|---|
|  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td><td>• •</td><td>• • • •</td></tr> </tbody> </table> | C                                                            | D | U |  | • • | • • • • | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td><td>2</td><td>5</td></tr> </tbody> </table> | C | D | U |  | 2 | 5 |
| C                                                                                   | D                                                                                                                                                      | U                                                            |   |   |  |     |         |                                                                                                                                                |   |   |   |  |   |   |
|                                                                                     | • •                                                                                                                                                    | • • • •                                                      |   |   |  |     |         |                                                                                                                                                |   |   |   |  |   |   |
| C                                                                                   | D                                                                                                                                                      | U                                                            |   |   |  |     |         |                                                                                                                                                |   |   |   |  |   |   |
|                                                                                     | 2                                                                                                                                                      | 5                                                            |   |   |  |     |         |                                                                                                                                                |   |   |   |  |   |   |

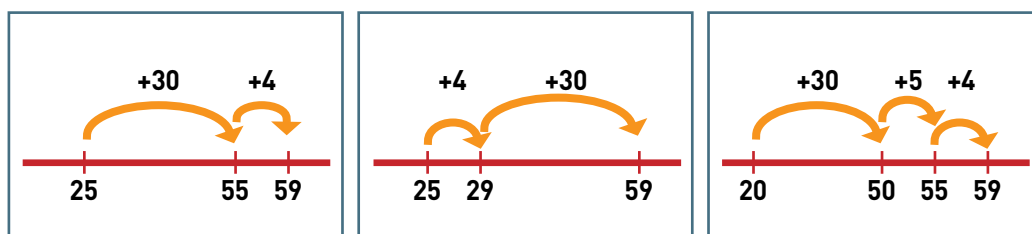
Mais uma vez, para desenvolver a operação  $25 + 34$  usando o material dourado e o ábaco de haste, o professor deve ter em mente os dois sentidos da adição (juntar e acrescentar) e, a depender de qual delas está associada ao problema apresentado aos alunos, deve manter a coerência entre a manipulação das peças, a linguagem e a representação utilizadas.

O QVL deve ser o último recurso didático a ser utilizado, dada a sua maior aproximação na representação com o algoritmo montado, e deve ocorrer apenas quando os alunos já conseguem visualizar e compreender as trocas (agrupamentos ou decomposições).

O quadro mostra a correspondência entre a representação no QVL e a operação no algoritmo convencional.

</

O quadro a seguir traz as representações de alguns raciocínios empregados para a operação  $25 + 34$ , usando a reta numérica:



Nesta etapa, os recursos didáticos necessários não se limitam mais à contagem, mas também, senão principalmente, para desenvolver a noção do valor posicional e a representação dos raciocínios desenvolvidos.

Para a continuidade, os exemplos apresentados a seguir trazem uma sugestão de sequência, que pode ser adequada à operação da adição:

- 1) Somar 14 com 4 (soma de uma parcela de dois algarismos com uma de um algarismo, com a inserção da dezena).
- 2) Somar 12 com 27 (soma de duas parcelas com dois algarismos cada).
- 3) Somar 132 com 5 (inserção da centena na soma com uma unidade).
- 4) Somar 147 com 12 (soma envolvendo uma parcela na ordem da centena e outra com dezena).
- 5) Somar 154 com 235 (soma envolvendo duas parcelas na ordem da centena).
- 6) Somar 1242 com 337 (soma envolvendo uma parcela na ordem do milhar e outra com centena).

#### **4.6) Procedimentos para a soma de duas parcelas de dois algarismos cada com trocas**

Nesta etapa, o uso dos recursos didáticos usados na seção anterior são os mesmos. A principal novidade a ser trabalhada com os alunos é o surgimento da necessidade das trocas nos resultados das adições.

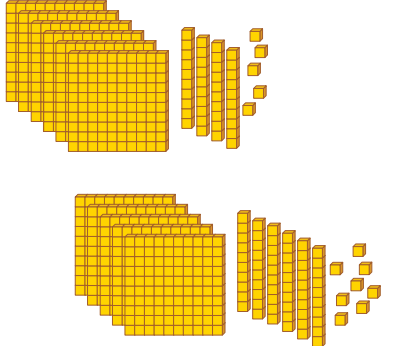
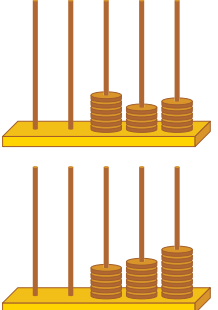
O trabalho a ser desenvolvido para atribuir significado consiste no resgate da etapa, quando é desenvolvido o conhecimento acerca dos fatos fundamentais da adição, e que resultam em um valor superior maior que 10, porém agora devidamente trabalhado com o material dourado, ábaco de haste e QVL.

| $\begin{array}{r} 4 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$    |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>   | C | D | U |  |  | 4 |  | + | 7 |  |   |    |
|------------------------------------------------------|---|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|--|--|---|--|---|---|--|---|----|
| C                                                    | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 4  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      | + | 7  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   |    |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
| $\begin{array}{r} 4 \\ + 7 \\ \hline 11 \end{array}$ |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>11</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U |  |  | 4 |  | + | 7 |  |   | 11 |
| C                                                    | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 4  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      | + | 7  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 11 |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
| $\begin{array}{r} 4 \\ + 7 \\ \hline 11 \end{array}$ |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>11</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U |  |  | 4 |  | + | 7 |  |   | 11 |
| C                                                    | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 4  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      | + | 7  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 11 |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
| $\begin{array}{r} 4 \\ + 7 \\ \hline 11 \end{array}$ |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>+</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U |  |  | 4 |  | + | 7 |  | 1 | 1  |
| C                                                    | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      |   | 4  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      | + | 7  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |
|                                                      | 1 | 1  |                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |   |  |  |   |  |   |   |  |   |    |

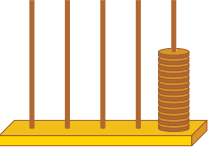
De maneira análoga, todas as demais operações de adição envolvendo parcelas com maior número de algarismos podem ser desenvolvidas a partir dessa mesma lógica de troca, ou seja, operações envolvendo dezenas, centenas e até milhares devem ser trabalhadas.

A seguir encontra-se o passo a passo para a resolução da adição de 645 e 568. Este exemplo foi escolhido porque envolve trocas nas unidades, dezenas e centenas.

**1º passo** - Consiste na representação das parcelas a serem somadas.

| $\begin{array}{r} 645 \\ + 568 \\ \hline \end{array}$ |  |  | <table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">+ 5 6 8</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 6 8 |  |  |  |  |  |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---------|--|--|--|--|--|
| C                                                     | D                                                                                 | U                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |  |
| 6                                                     | 4                                                                                 | 5                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |  |
| + 5 6 8                                               |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |  |
|                                                       |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |  |

**2º passo** - Serão adicionadas (juntando ou acrescentando) os valores das unidades.

| $\begin{array}{r} 645 \\ + 568 \\ \hline 13 \end{array}$ |  |  | <table border="1" style="margin: auto;"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">+ 5 6 8</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td>13</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 6 8 |  |  |  |  | 13 |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---------|--|--|--|--|----|
| C                                                        | D                                                                                   | U                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |    |
| 6                                                        | 4                                                                                   | 5                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |    |
| + 5 6 8                                                  |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |    |
|                                                          |                                                                                     | 13                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |   |   |         |  |  |  |  |    |

**3º passo** - É feita a troca de 10 unidades por 1 dezena. Neste caso, essa uma dezena é também acrescentada a outras dezenas. O adicionar dessa dezena é o significado da expressão “vai um” usada por aqueles que aprenderam o algoritmo convencional de forma puramente mecânica.

|     |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>13</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 |  |   | 13 |
|-----|---|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|--|---|----|
| C   | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
| 6   | 4 | 5  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
| + 5 | 6 | 8  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
|     |   | 13 |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
|     |   |    | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 |  | 1 | 3  |
| C   | D | U  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
| 6   | 4 | 5  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
| + 5 | 6 | 8  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |
|     | 1 | 3  |                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |   |    |

**4º passo** - São somados (juntando ou acrescentando) os valores das dezenas, incluindo aquela que foi trocada.

|     |       |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4+6+1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>11</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 |  | 4+6+1 | 3 |  | 11 |  |
|-----|-------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|--|-------|---|--|----|--|
| C   | D     | U |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |       |   |  |    |  |
| 6   | 4     | 5 |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |       |   |  |    |  |
| + 5 | 6     | 8 |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |       |   |  |    |  |
|     | 4+6+1 | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |       |   |  |    |  |
|     | 11    |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |   |   |   |   |   |     |   |   |  |       |   |  |    |  |

**5º passo** - É feita a troca de 10 dezenas por 1 centena. Mais uma vez, essa centena trocada é acrescentada às demais centenas. Pode ser observado aqui que se repete a expressão “vai um” nas centenas.

| $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 645 \\ + 568 \\ \hline 113 \end{array}$ |   |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td colspan="2">4+6+1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td colspan="2">11</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 | 4+6+1 |  | 3 | 11 |  |  |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|-------|--|---|----|--|--|
| C                                                                      | D | U |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 6                                                                      | 4 | 5 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| + 5                                                                    | 6 | 8 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 4+6+1                                                                  |   | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 11                                                                     |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |

| $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 645 \\ + 568 \\ \hline 113 \end{array}$ |   |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 | 1 | 1 | 3 |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|---|---|
| C                                                                      | D | U |                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |
| 6                                                                      | 4 | 5 |                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |
| + 5                                                                    | 6 | 8 |                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |
| 1                                                                      | 1 | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |

**6º passo** - São somados (juntando ou acrescentando) os valores das centenas, incluindo aquela que foi trocada.

| $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 645 \\ + 568 \\ \hline 1213 \end{array}$ |   |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ 5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td colspan="2">6+5+1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td colspan="2">12</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | C | D | U | 6 | 4 | 5 | + 5 | 6 | 8 | 6+5+1 |  | 3 | 12 |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|-------|--|---|----|--|--|
| C                                                                       | D | U |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 6                                                                       | 4 | 5 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| + 5                                                                     | 6 | 8 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 6+5+1                                                                   |   | 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |
| 12                                                                      |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |       |  |   |    |  |  |

**7º passo** - É feita a troca de 10 dezenas por 1 centena. Mais uma vez, essa centena trocada é acrescentada às demais centenas. Pode ser observado aqui que se repete a expressão “vai um” nas centenas.

|       |       |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>M</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td colspan="4"><hr/></td> </tr> <tr> <td></td> <td>6+5+1</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>12</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | M | C | D | U |  | 6 | 4 | 5 | + | 5 | 6 | 8 | <hr/> |  |  |  |   | 6+5+1 | 1 | 3 |  | 12 |  |  |
|-------|-------|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|-------|--|--|--|---|-------|---|---|--|----|--|--|
| M     | C     | D | U                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
|       | 6     | 4 | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
| +     | 5     | 6 | 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
| <hr/> |       |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
|       | 6+5+1 | 1 | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
|       | 12    |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
|       |       |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>M</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td colspan="4"><hr/></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>                                                         | M | C | D | U |  | 6 | 4 | 5 | + | 5 | 6 | 8 | <hr/> |  |  |  | 1 | 2     | 1 | 3 |  |    |  |  |
| M     | C     | D | U                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
|       | 6     | 4 | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
| +     | 5     | 6 | 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
| <hr/> |       |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |
| 1     | 2     | 1 | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |       |   |   |  |    |  |  |

**8º passo** - Resultado final da operação.

|       |   |   | <table border="1"> <thead> <tr> <th>M</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td colspan="4"><hr/></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> | M | C | D | U |  | 6 | 4 | 5 | + | 5 | 6 | 8 | <hr/> |  |  |  | 1 | 2 | 1 | 3 |
|-------|---|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|-------|--|--|--|---|---|---|---|
| M     | C | D | U                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |   |   |   |
|       | 6 | 4 | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |   |   |   |
| +     | 5 | 6 | 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |   |   |   |
| <hr/> |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |   |   |   |
| 1     | 2 | 1 | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |       |  |  |  |   |   |   |   |

Para além desse algoritmo convencional, o cálculo mental deve ser explorado, mesmo com essas operações com números maiores. Mais uma vez, o recurso da reta numérica pode ser uma forma adequada de representar os diferentes raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

Nesta parte do desenvolvimento do trabalho é o momento de provocar uma discussão, sobre por que é adequada a resolução dos algoritmos convencionais ocorrer da direita para a esquerda, uma vez que é com as trocas que essas orientações são recomendadas.

Para a continuidade, os exemplos apresentados a seguir trazem uma sugestão de sequência, que pode ser adequada para a operação da adição:

- 1) Somar 4 com 7 (soma de parcelas com uma unidade cada).
- 2) Somar 16 com 8 (soma de uma parcela de dois algarismos com uma de um algarismo, com a inserção da dezena).
- 3) Somar 15 com 26 (soma de duas parcelas com dois algarismos cada).
- 4) Somar 132 com 9 (inserção da centena na soma com uma unidade).
- 5) Somar 147 com 65 (soma envolvendo uma parcela na ordem da centena e outra com dezena).
- 6) Somar 859 com 485 (soma envolvendo uma parcela na ordem da centena).
- 7) Somar 1648 com 675 (soma envolvendo uma parcela na ordem do milhar e outra com centena).

#### **4.7) Jogo do Caracol: exemplo de jogo envolvendo a adição**

Este é um jogo bastante conhecido e de fácil aplicação. Porém, como em qualquer atividade, o professor deve se preocupar em organizar a turma para que os objetivos pedagógicos sejam cumpridos. Obviamente, turmas que não estão acostumadas com jogos terão uma dispersão maior, mas esta também é uma oportunidade de aprender. O professor deve construir com os alunos as regras que deverão ser respeitadas, de modo que se tenha um ambiente adequado de aprendizagem. Igualmente importante é, após o jogo, discutir sobre o aprendizado obtido pelas crianças durante a vivência.

Vale explicitar que, em um jogo como esse, com procedimentos mentais e escritos, com ou sem o uso de fatos matemáticos, com o uso de algoritmos pessoais ou convencionais, o número de operações realizadas é muito maior que em enfadonhas listas de exercícios. Além da quantidade, a qualidade dessas operações, na perspectiva da construção de significados é também maior, uma vez que a conversa entre os alunos é uma consequência inevitável e desejada.

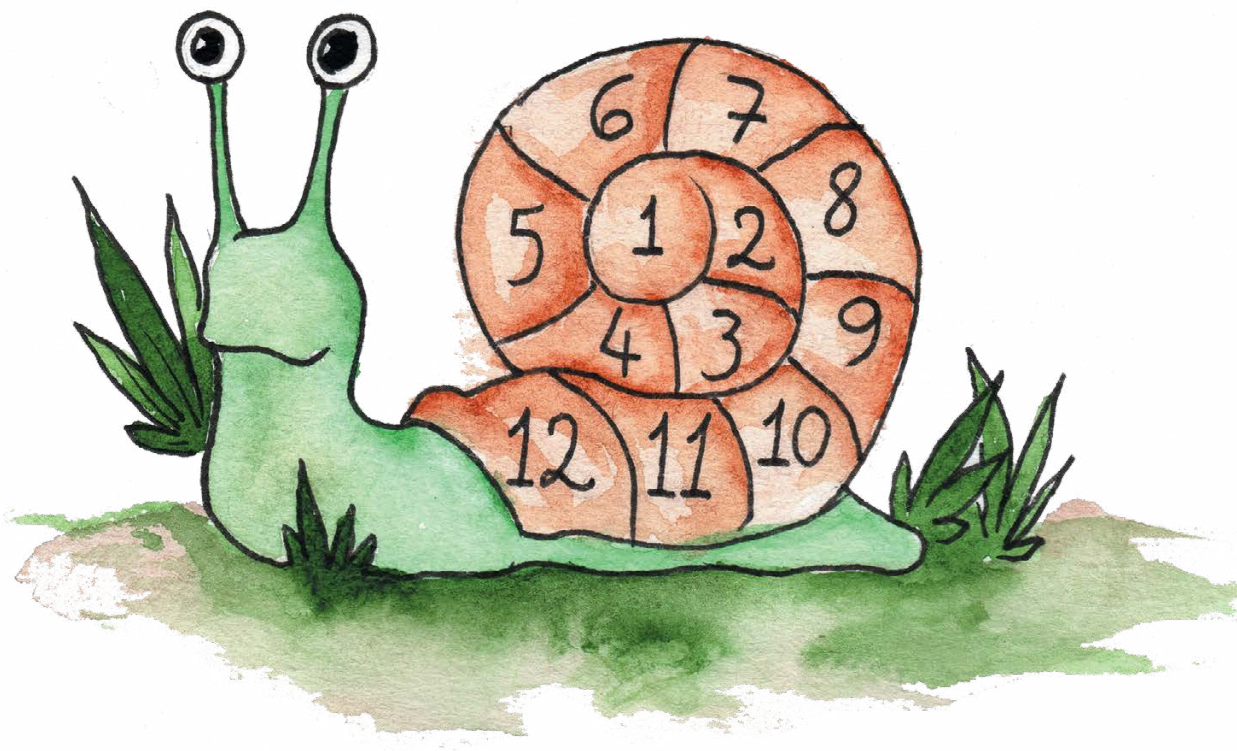
#### **Materiais necessários**

Tabuleiro, marcadores e dois dados.

## Como se joga

- As equipes jogam alternadamente.
- Cada equipe, na sua vez, joga os dados, calcula a soma dos valores obtidos e comunica este resultado à equipe adversária.
- Em seguida, coloca uma de suas fichas no espaço que contém o resultado da adição em seu tabuleiro.
- Se o resultado obtido já estiver coberto por uma ficha, a equipe passa a sua vez.
- Se uma das equipes cometer um erro no cálculo de um resultado, e o adversário apontar o engano antes de realizar a sua jogada, este tem o direito de retirar uma ficha qualquer do tabuleiro do outro.
- Ganha a equipe que preencher o seu tabuleiro primeiro.

Fonte: Borim, Júlia. Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática. 4 edição. São Paulo: IME-USP, 1996.





# 5

## Subtração com números naturais

---

O desenvolvimento da ideia da subtração, enquanto uma operação aritmética e não um algoritmo, deve ocorrer apenas após a consolidação das ideias da adição. Os alunos na fase inicial da escolarização, mesmo na Educação Infantil, já possuem as noções de retirar, separar em partes e até comparar diferenças numéricas. Essas noções da subtração, assim como na adição, são construídas em seu cotidiano, fora do contexto escolar, e são sistematizadas durante a construção do senso numérico trabalhado no desenvolvimento dos conceitos inerentes ao Sistema de Numeração Decimal. Por isso, os três significados da subtração (subtrativo, aditivo e comparativo) apresentados anteriormente ganham relevância.

Kamii e Declark (1994) enfatizam que, tanto na subtração quanto na adição, o objetivo deve ser “o de incentivar as crianças a pensarem e a lembrarem dos resultados de seu próprio raciocínio, e não simplesmente ensinar-lhes técnicas específicas para darem respostas escritas”. (p. 139)

### 5.1) Problema de enredo envolvendo subtração

Em Kamii e Declark (1994, p. 148) temos a seguinte observação sobre o tema:

*Problemas de enredo envolvendo subtração podem e devem ser enfatizados desde o começo da 1ª série, com situações reais. De fato, esses problemas da vida real, tais como saber quantas cartas se deve procurar quando apenas 38 cartas das 40 podem ser localizadas, são os únicos tipos de problemas com subtração que defendo para a 1ª série. [...]*

*Por que defender problemas de enredo?*

*Defendo esse tipo de problema em subtração pelo mesmo motivo que o recomendo na adição. Primeiro, as crianças constroem aritmética por aritmetização lógica da realidade e, segundo, pesquisas mostraram que esses*

*problemas são relativamente fáceis para os alunos de 1ª série, na ausência de instrução.*

*A maioria dos educadores de matemática pensa sobre problemas verbais como aplicações de técnicas de calcular, em vez de como um ponto inicial que pode levar a um cálculo generalizado, sem conteúdo, contexto ou finalidade prática. Mas, em subtração como em adição, as crianças constroem relações numéricas sem conteúdo, tais como  $5 - 2 = 3$ , a partir de suas ideias sobre as coisas diárias. Ter que comer mais 2 pedaços de cenoura antes de sair da mesa, receber um presente a mais que sua irmã, calcular quantos pedaços de chiclete sobrarão se ele der um pedaço a um amigo e comer um, são exemplos de situações diárias. As crianças constroem aritmética por aritmetização lógica desses conteúdos (através da abstração reflexiva). Não é importante o tipo de objeto que a criança tem disponível: chicletes, presentes, cartas ou conchas.*

*O ensino de técnicas de cálculo antes da apresentação de problemas verbais, através de livros em vez de situações diárias, é uma manifestação da crença de que técnicas são “introduzidas” às crianças pelos livros que são repositores de conhecimento e que, sem essas técnicas as crianças não conseguirão raciocinar aritmeticamente. Eu acho que as crianças têm a capacidade de pensar logicamente e que a aritmética nasce dessa habilidade. [...]*

*Em vez de pensarmos sobre problemas verbais como problemas de adição ou subtração, deveríamos considerá-los como perguntas que as crianças tentam responder por si mesmas.*

## **5.2) Estratégias para desenvolvimento dos fatos da subtração propostos por Walle (2009)**

Nesse sentido, a representação das estratégias (raciocínios) não só ajuda os alunos a comunicá-las como também auxilia na memória de curto prazo. Por isso, a escuta atenta do professor para atribuir significado à sua produção e comentários é importante. Segundo Van de Walle (2009, p. 250), o professor

*deve aprender a escutar o tipo de raciocínio que eles [alunos] estão usando e as estratégias que estão sendo sugeridas. Os números envolvidos em um cálculo e também os tipos de histórias-problemas usados tendem a influenciar como os estudantes abordam um problema. Mesmo assim, você [professor] descobrirá muitas variações nos processos de pensamento em qualquer sala de aula. (p. 250)*

A observação de John Van de Walle é importante para o que foi dito anteriormente neste texto: é importante que o professor o conheça os significados das operações para que ele mantenha a coerência em todo o seu processo de ensino, que começa com a proposição de enunciados dos problemas, perpassa pela resolução e vai até a validação dos resultados encontrados.

Com as noções acerca das centenas, dezenas e unidades já consolidadas no trabalho com a adição, é possível atribuir significado às estratégias apresentadas por Walle (2009).

| As estratégias inventadas para subtração: contagem para a frente                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Adicionar dezenas para conseguir fechar, e então as unidades</b><br/> <b>73 – 46</b><br/>           46 e 20 é 66. (Mais 30 é demais.)<br/>           Então mais 4 é 70 e 3 é 73.<br/>           Isto é 20 e 7 ou 27</p> <p><math>46 + 20 = 66</math><br/> <math>66 + 4 = 70</math><br/> <math>70 + 3 = 73</math><br/> <math>20 + 4 + 3 = 27</math></p> | <p><b>Adicionar unidades para formar uma dezena, então dezenas e unidades</b><br/> <b>73 – 46</b><br/>           46 e 4 é 50. 50 e 20 é 70.<br/>           E mais 3 é 73.<br/>           4 e 3 é 7 e 20 é 27.</p> <p><math>46 + 4 = 50</math><br/> <math>50 + 20 = 70</math><br/> <math>70 + 3 = 73</math><br/> <math>4 + 20 + 3 = 27</math></p> |
| <p><b>Adicionar dezenas para exceder, então voltar</b><br/> <b>73 – 46</b><br/>           46 e 30 é 76. Isto é 3 demais,<br/>           então ele tem 27 anos.</p> <p><math>46 + 30 = 76 - 3 = 73</math><br/> <math>30 - 3 = 27</math></p>                                                                                                                   | <p>Da mesma forma, 46 e 4 é 50.<br/>           50 e 23 é 73.<br/>           23 e 4 é 27.</p> <p><math>46 + 4 = 50</math><br/> <math>50 + 23 = 73</math><br/> <math>23 + 4 = 27</math></p>                                                                                                                                                        |

Fonte: Walle, 2009, p. 252

Em três das estratégias apresentadas foram usadas apenas a operação de adição para obter o resultado de  $73 - 46$ . Somente em uma delas foi usada a subtração, mesmo assim, em todas elas, o objetivo foi partir de 46 e chegar em 73. Essas quatro estratégias, denominadas por Walle (2009, p. 252) como “contagem para a frente”, estão associadas ao significado de completar 46 até 73, ou seja, está sendo usada a ideia aditiva da subtração. Perguntas como “o que falta em 46 para chegar em 73?” ou “46 mais quanto é igual a 73?” podem fazer sentido nesse contexto.

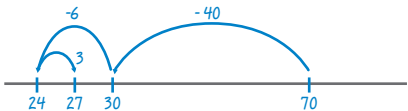
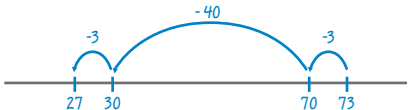
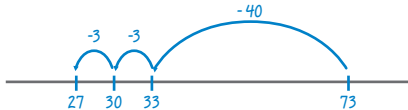
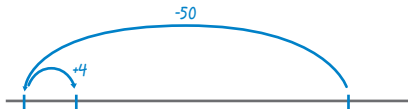
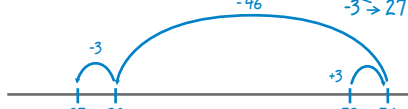
Uma representação comumente usada para perguntas dessa natureza é algo semelhante a:

$$46 + \underline{\quad} = 73 \quad \text{ou} \quad 46 + \bigcirc = 73$$

Nesse momento, um detalhe importante de representação, relacionado ao objetivo, geralmente passa despercebido. Isso ocorre porque, para a criança, “ $73 - 46 =$ ” é diferente de “ $46 + \_\_ = 73$ ”. Na primeira representação, o símbolo da igualdade (=) tem significado operatório e indica que o aluno deve apenas fazer um cálculo. Na segunda, traz o significado relacional ou funcional, pois estabelece uma relação entre duas expressões matemáticas. (KEIRAN, 1981)

Outro conjunto de estratégia apresentada por Walle (2009) associada à subtração por retirada pode ser desenvolvido antes de atribuir significado aos algoritmos convencionais da subtração.

Ambas as estratégias exploram a reta numérica como um recurso para a representação.

| As estratégias inventadas para subtração por retirada                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Retirar dezenas de dezenas, então subtrair as unidades</b><br/> <b><math>73 - 46</math></b></p> <p>70 menos 40 é 30<br/> Tirando mais 6 temos 24.<br/> Agora, adicionando as 3 unidades, obtemos 27.</p> <p><math>70 - 40 \rightarrow 30 - 6</math><br/> <math>24 + 3 \rightarrow 27</math></p>  <p>Ou</p> <p>70 menos 40 é 30<br/> Eu posso tirar aqueles 3, mas eu preciso de mais 3 dos 30 para fazer 27.</p> <p><math>70 - 40 = 30</math><br/> <math>(73 - 3 = 70)</math><br/> <math>30 - 3 = 27</math></p>  | <p><b>Retirar as dezenas, e então as unidades</b><br/> <b><math>73 - 46</math></b></p> <p>73 menos 40 é 33. Então leve 6:<br/> Tire 3 e faça 30, menos outros 3 é 27</p> <p><math>73 - 40 \rightarrow 33 - 3</math><br/> <math>30 - 3 \rightarrow 27</math></p>  <p><b>Retirar as dezenas extras, e então adicionar de volta</b><br/> <b><math>73 - 46</math></b></p> <p>73 menos 50 é 23.<br/> Mas isto tirou 4 a mais.<br/> 23 e 4 é 27.</p> <p><math>73 - 50 \rightarrow 23 + 4</math><br/> <math>\rightarrow 27</math></p>  <p><b>Adicionar ao todo se necessário</b><br/> <b><math>73 - 46</math></b></p> <p>Dê 3 a 73 para fazer 76.<br/> 76 leve 46 é 30.<br/> Agora retire 3 de volta <math>\rightarrow 27</math></p> <p><math>+3</math><br/> <math>73 - 46 \rightarrow</math><br/> <math>76 - 46 \rightarrow 30</math><br/> <math>-3 \rightarrow 27</math></p>  |

Fonte: Walle, 2009, p. 253

### 5.3) Conversas matemáticas para pensamento aritmético da subtração

Humphreys e Parker (2019) apresentam cinco estratégias para a subtração:

1. Arredondar o subtraendo até um múltiplo de 10 e ajustar.

“Arredondei 28 para 30. Depois subtraí 30 de 63 e obtive 33. Então somei 2 de volta porque eu havia retirado 2 a mais.”

$$\begin{array}{r} 63 - 28 \\ 63 - 30 = 33 \\ \quad + 2 \\ \hline 35 \end{array}$$

2. Decompor o subtraendo.

“Primeiro eu tirei 20 de 63, e restou 43. Então, vi o 8 em 28 como um 3 mais 5; primeiro tirei o 3 de 43 e ficou 40; depois tirei 5 e restou 35.”

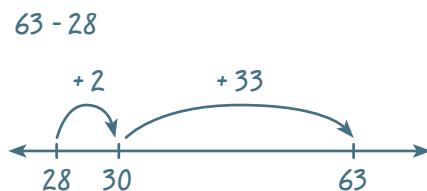
$$\begin{array}{r} 63 - 28 \\ 63 - 20 = 43 \\ \quad - 3 \\ \hline 40 \\ \quad - 5 \\ \hline 35 \end{array}$$

3. Em vez disso, somar.

1ª maneira – Primeiro, chegar até um múltiplo de 10: “Comecei com 28 e acrescente 2 para obter 30; depois acrescente 33 e obtive 63. Então, ao todo, acrescente 2 e 33, ou 35”.

$$\begin{array}{r} 63 - 28 \\ 28 + 2 = 30 \\ \quad + 33 \\ \hline 63 \end{array}$$

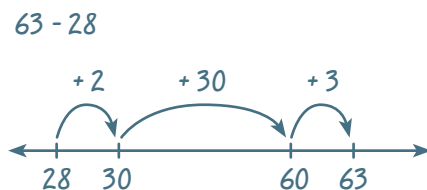
ou



2ª maneira – Primeiro, chegar até um múltiplo de 10 e então adicionar um múltiplo de 10: “Comecei com 28 e acrescente 2 para obter 30. Depois acrescente 30 para obter 60 e então acrescente 3 para obter 63. Somei 2 mais 30 mais 3 para chegar a 35 como minha resposta”.

$$\begin{array}{r} 63 - 28 \\ 28 + 2 = 30 \\ \quad + 30 \\ \hline 60 + 3 = 63 \end{array}$$

ou



$$2 + 30 + 3 = 35$$

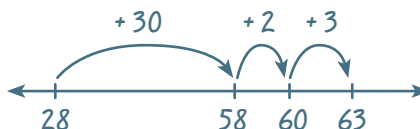
3ª maneira – Primeiro, adicionar um múltiplo de 10: “Comecei com 28 e pulei 30 para obter 58. Depois pulei mais 2 para chegar a 60 e mais 3 para chegar a 63. Ao todo, pulei 35”.

$$63 - 28$$

$$63 - 28$$

$$\begin{array}{l} 28 + 30 = 58 \\ \quad + 2 \\ 60 + 3 = 63 \end{array}$$

ou



$$30 + 2 + 3 = 35$$

#### 4. Mesma diferença

“Acrescentei 2 a 28 e obtive 30; depois acrescentei 2 a 63 e obtive 65. E 65 menos 30 é 35.”

$$\begin{array}{c} 63 - 28 \\ + 2 \quad \quad + 2 \\ \hline 65 - 30 \\ 35 \end{array}$$

ou

$$63 - 28$$

$$65 - 30 = 35$$



#### 5. Separar por posição

“60 menos 20 é 40; 3 menos 8 é 5 negativo; 40 menos 5 é 35.”

$$\begin{array}{r} 60 + 3 \\ - 20 + 8 \\ \hline (60 - 20) + (3 - 8) = 40 + (-5) \\ = 40 - 5 = 35 \end{array}$$

Deve ser lembrado que as autoras usam o que se chama de “reta numérica aberta” como uma forma de representação dos pensamentos dos alunos.

*As retas numéricas abertas não têm escala e, portanto, não pretendem ser medidas acuradas das unidades. Em vez disso, os ‘saltos’ podem ser aproximadamente proporcionais. Uma coisa boa sobre elas é que permitem números muito grandes ou pequenos sem ter que se preocupar com unidades individuais. (HUMPHREYS e PARKER, 2019, p. 89)*

#### 5.4) Dando significado aos algoritmos convencionais da subtração

Atenção especial deve ser dada aos dois algoritmos convencionais mais recorrentes no Brasil. O primeiro, frequentemente associado à inadequada expressão “empresta um”, e o outro à também inadequada expressão “cai um”. A ênfase dada ao termo inadequada deve-se à sua não atribuição de significado matemático ao procedimento, afinal, nada é emprestado, tampouco cai.

| Denominação adequada                                        | Recurso à ordem superior                                | Compensação                                              |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Expressão inadequada                                        | “empresta um”                                           | “cai um”                                                 |
| Proposta                                                    | Resolução                                               |                                                          |
| $13 - 5 = \begin{array}{r} 13 \\ - 5 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1^1 3 \\ - 5 \\ \hline 8 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1^1 3 \\ - 15 \\ \hline 8 \end{array}$ |

No algoritmo que usa o recurso à ordem superior, o primeiro passo consiste na percepção de que o minuendo (número que será subtraído) é formado por uma dezena e três unidades, e não treze unidades. Se a visualização do aluno o levar a ver 13 unidades, ele não terá nenhuma dificuldade em efetuar essa operação e chegará à resposta 8, seja acrescentando 8 ao 5, retirando 5 de 8 ou verificando a diferença entre 13 e 5 (o que dependerá do contexto do problema apresentado no enunciado da tarefa a ser dada para o aluno).

Diante disso, uma opção é começar propondo tarefas que envolvam números maiores e com um resultado também grande, de maneira que seja difícil para o aluno fazer o cálculo mentalmente. Essa opção pode ser também frágil, caso as estratégias, como as apresentadas acima, sejam bem desenvolvidas.

Uma estratégia adequada é, depois das estratégias serem bem desenvolvidas, o professor assumir que o objetivo é o ensino dos algoritmos mais recorrentes, afirmando aos alunos que se trata de mais duas outras estratégias e que essas são conhecidas pelas pessoas fora da escola.

### 5.5) Dando significado ao algoritmo convencional com recurso à ordem superior

Para iniciar o desenvolvimento desse trabalho é importante a representação dessa operação no QVL ou no ábaco de haste. Dada a valorização desses dois recursos ao valor posicional dos números, eles ajudarão o aluno a visualizar o 13 como uma dezena e três unidades.

O erro mais recorrente entre os alunos, após a visualização, ocorre quando as unidades, dezenas ou centenas do minuendo são menores que as do subtraendo. No exemplo, será comum o aluno apresentar a resposta 12, uma vez que ele irá subtrair 3 de 5 e manter a dezena. Para a superação de erro, o aluno precisa ter clareza de quais números são o minuendo e o subtraendo, ou seja, quem está sendo subtraído e quem está sendo o valor a ser subtraído.

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 5 \\ \hline \end{array}$$

| C     | D | U |
|-------|---|---|
|       | 1 | 3 |
| -     |   | 5 |
| <hr/> |   |   |

O uso desses dois recursos facilita a percepção dos alunos de que:

- Não é possível tirar 5 de 3 se o que estiver no contexto é o significado subtrativo da subtração, ou;
- Não é possível fazer 5 chegar em 3 porque o 5 é maior que 3.

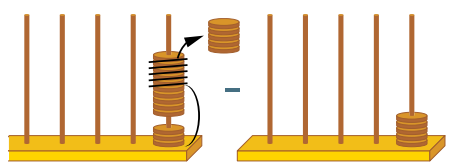
Dadas essas duas impossibilidades, os alunos devem perceber a necessidade de trocar uma dezena por 13 unidades, ficando a representação da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 5 \\ \hline \end{array}$$

| C     | D | U  |
|-------|---|----|
|       |   | 13 |
| -     |   | 5  |
| <hr/> |   |    |

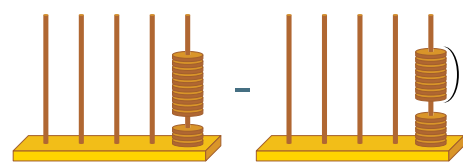
A partir dessa etapa, o procedimento a ser tomado depende do significado que o contexto do problema indica.

**Significado subtrativo da subtração**



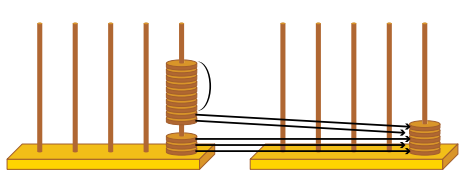
De 13 unidades são retiradas 5 e restam 8

**Significado aditivo da subtração**



Faltam 8 unidades para 5 chegar a 13

**Significado comparativo da subtração**



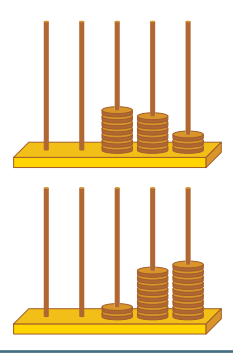
A diferença entre 13 e 5 são 8 unidades

O significado da comparação deve ser evitado nessa etapa do processo, porque a comparação entre 3 e 5 pode levar à inadequada resposta 2. Caso ocorra a necessidade de abordar esse significado, o professor deve mostrar que não se trata de uma comparação de 3 com 5, mas sim entre 5 e 13, efetuando-se a troca e assim justificando também a troca feita no algoritmo. No entanto, deve ser usado para ajudar os alunos, caso apresentem dificuldades em relação às trocas.

A seguir encontra-se o passo a passo para a resolução da subtração entre 763 e 289. Este exemplo foi escolhido porque envolve trocas nas unidades, dezenas e centenas.

**1º passo** - Consiste na representação das parcelas a serem subtraídas.

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 289 \\ \hline \end{array}$$



| C   | D | U |
|-----|---|---|
| 7   | 6 | 3 |
| - 2 | 8 | 9 |
|     |   |   |

**2º passo** - Troca de uma dezena por dez unidades.

Diante da impossibilidade de subtrair 9 de 3, é feita a troca de uma dezena por dez unidades do minuendo. Com essa troca, o minuendo fica com cinco dezenas e com treze unidades.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ } 8 \text{ } 3 \\ - 2 \text{ } 8 \text{ } 9 \\ \hline \end{array}$$

| C | D                         | U              |
|---|---------------------------|----------------|
| 7 | <del>8</del> <sup>5</sup> | <sup>1</sup> 3 |
| - | 2                         | 8              |
|   |                           | 9              |
|   |                           |                |

**3º passo** - É feita a subtração nas unidades.

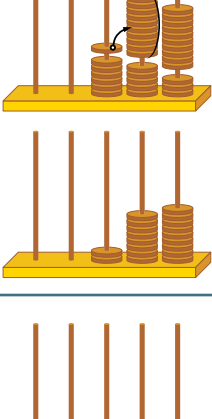
Mais uma vez, a forma pela qual será feita a subtração deve ser coerente com o significado da subtração contida no problema apresentado na tarefa. O resultado dessa subtração é 9.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ } 8 \text{ } 3 \\ - 2 \text{ } 8 \text{ } 9 \\ \hline \phantom{00} \phantom{00} 4 \end{array}$$

| C | D                         | U              |
|---|---------------------------|----------------|
| 7 | <del>8</del> <sup>5</sup> | <sup>1</sup> 3 |
| - | 2                         | 8              |
|   |                           | 9              |
|   |                           | 4              |

É importante o professor observar que esta é uma diferente representação do número 763. Para isso, ele pode retomar o material dourado para ajudar na visualização. Esta é uma situação que não difere de dizer que 13 pode ser representado por uma dezena e três unidades ou treze unidades.

|   |              |              |    |  |
|---|--------------|--------------|----|--|
|   |              |              |    |  |
|   | 6            | 15           |    |  |
|   | <del>7</del> | <del>8</del> | 13 |  |
| - | 2            | 8            | 9  |  |
|   |              |              | 4  |  |



|   |              |              |    |
|---|--------------|--------------|----|
|   |              |              |    |
|   | 6            | 15           |    |
|   | <del>7</del> | <del>8</del> | 13 |
| - | 2            | 8            | 9  |
|   |              |              | 4  |

|   |              |              |    |  |
|---|--------------|--------------|----|--|
|   |              |              |    |  |
|   | 6            | 15           |    |  |
|   | <del>7</del> | <del>8</del> | 13 |  |
| - | 2            | 8            | 9  |  |
|   |              | 7            | 4  |  |


|                           |                            |    |   |
|---------------------------|----------------------------|----|---|
| C                         | D                          | U  |   |
| <del>7</del> <sup>6</sup> | <del>8</del> <sup>15</sup> | 13 |   |
| -                         | 2                          | 8  | 9 |
|                           |                            | 7  | 4 |

**6º passo** - É feita a subtração nas centenas.

Neste caso, não é necessária a realização da troca (e nem poderia ser) e o resultado da subtração entre 6 e 2 é 4.

|       |              |              |    |  |
|-------|--------------|--------------|----|--|
|       |              |              |    |  |
|       | 6            | 15           |    |  |
|       | <del>7</del> | <del>8</del> | 13 |  |
| -     | 2            | 8            | 9  |  |
| <hr/> |              |              |    |  |
|       | 4            | 7            | 4  |  |

|       |                |                 |    |
|-------|----------------|-----------------|----|
|       | C              | D               | U  |
|       | 7 <sup>6</sup> | 8 <sup>15</sup> | 13 |
| -     | 2              | 8               | 9  |
| <hr/> |                |                 |    |
|       | 4              | 7               | 4  |

A próxima operação busca apresentar três situações que geram estranhamento, mas que podem (devem, se esta for a opção) seguir os mesmos procedimentos. As três situações são:

- a) A presença do zero no minuendo.
- b) A presença do zero no resultado.
- c) Não é possível a troca na ordem imediatamente superior.

O exemplo que perpassa por esses critérios pode ser: subtrair 693 de 1000.

**1º passo** - Consiste na representação das parcelas a serem subtraídas.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
|       |   |   |   |   |
|       | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -     |   | 6 | 9 | 3 |
| <hr/> |   |   |   |   |

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
|       | M | C | D | U |
|       | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -     |   | 6 | 9 | 3 |
| <hr/> |   |   |   |   |

## 2º passo - Sucessão de trocas.

Após a visualização de que o minuendo contém zero unidades na unidade, na dezena e na centena, para efetuar as subtrações, o aluno deve perceber que ele não pode trocar dezenas por unidades. Da mesma maneira, não poderá trocar a centena por dezenas, mas sim trocar um milhar por dez centenas.

| M | C | D | U |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |
| - | 0 | 6 | 9 | 3 |
|   |   |   |   |   |

| M | C | D | U |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |
| - | 0 | 6 | 9 | 3 |
|   |   |   |   |   |

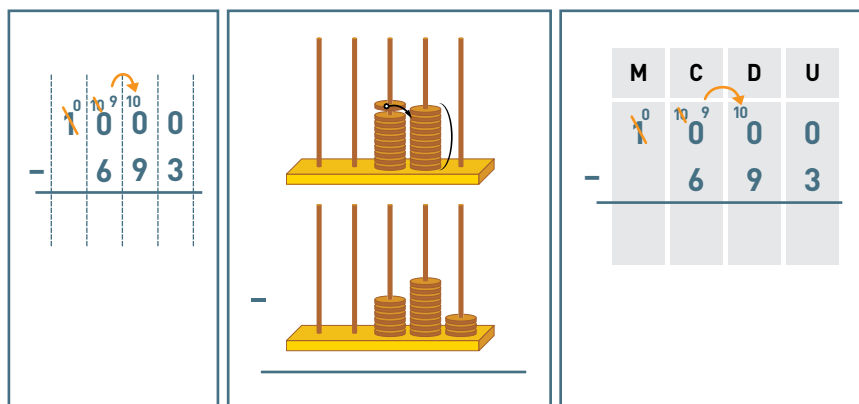
Com essa troca, o minuendo deixou de ter um milhar e passou a ter dez centenas, mas isso ainda não permite fazer a subtração da unidade. Uma nova troca se faz necessária: uma centena é substituída por dez dezenas.

| M | C | D | U |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |
| - | 0 | 6 | 9 | 3 |
|   |   |   |   |   |

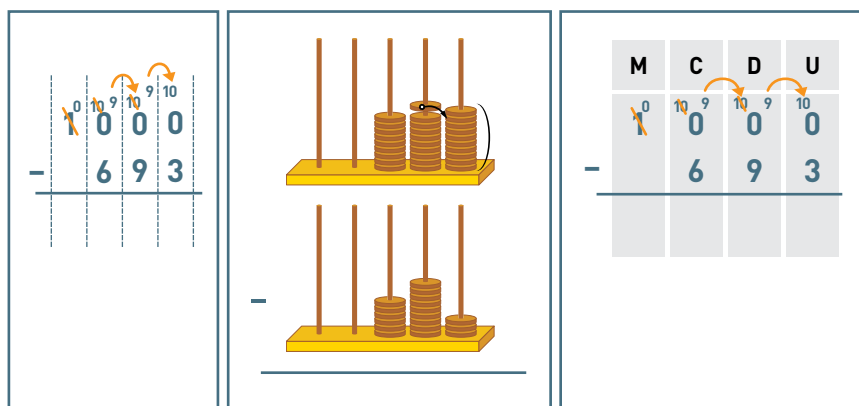
| M | C | D | U |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |
| - | 0 | 6 | 9 | 3 |
|   |   |   |   |   |

**3º passo** - É feita a subtração nas unidades.

Mais uma vez, a forma pela qual será feita a subtração deve ser coerente com o significado da subtração contida no problema apresentado na tarefa. O resultado dessa subtração é 9.



Com esta troca, o número 1000 ficou representado por nove centenas e dez dezenas, tornando possível a troca de uma dezena por dez unidades.

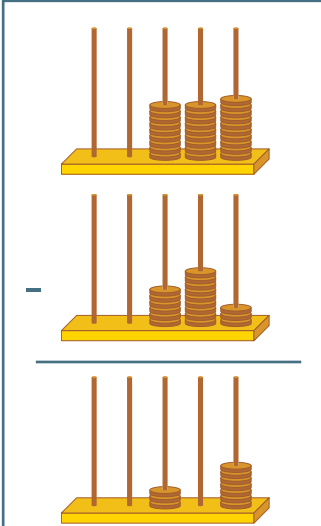


Com esta última troca, o número 1000 ficou representado por nove centenas, nove dezenas e dez unidades, permitindo assim que sejam efetuadas as subtrações nas unidades, nas dezenas e nas centenas.

Note-se que, neste caso, não há obrigatoriedade de que elas sejam feitas nessa ordem.

**4º passo** - São feitas as subtrações das centenas, uma vez que não restaram na ordem do milhar.

|   |    |    |    |  |
|---|----|----|----|--|
|   |    |    |    |  |
|   | 10 | 10 | 10 |  |
| 1 | 0  | 0  | 0  |  |
| - | 6  | 9  | 3  |  |
| 0 | 3  |    |    |  |

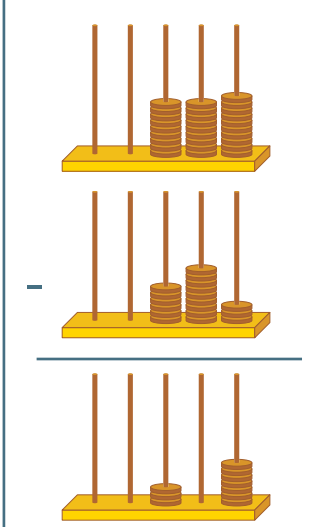


| M              | C                 | D                 | U               |
|----------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 1 <sup>0</sup> | 0 <sup>10 9</sup> | 0 <sup>10 9</sup> | 0 <sup>10</sup> |
| -              | 6                 | 9                 | 3               |
| 0              | 3                 |                   |                 |

**5º passo** - São feitas as subtrações das dezenas.

Neste caso, há nove dezenas no minuendo e no subtraendo, o que implica resultado zero.

|   |    |    |    |  |
|---|----|----|----|--|
|   |    |    |    |  |
|   | 10 | 10 | 10 |  |
| 1 | 0  | 0  | 0  |  |
| - | 6  | 9  | 3  |  |
| 0 | 3  | 0  |    |  |

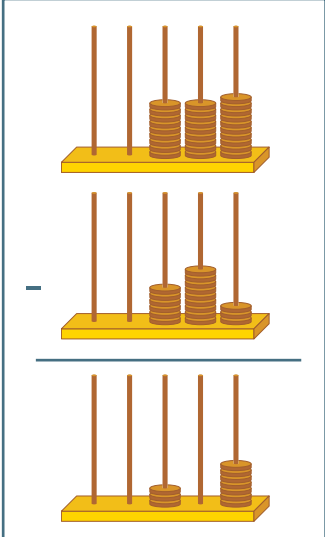


| M              | C                 | D                 | U               |
|----------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 1 <sup>0</sup> | 0 <sup>10 9</sup> | 0 <sup>10 9</sup> | 0 <sup>10</sup> |
| -              | 6                 | 9                 | 3               |
| 0              | 3                 | 0                 |                 |

**6º passo** - São feitas as subtrações das unidades.

Feita essa subtração, é encontrado o resultado desta operação.

|   |                |                 |                |                 |
|---|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
|   |                |                 |                |                 |
|   | <sup>0</sup> 1 | <sup>10</sup> 0 | <sup>9</sup> 0 | <sup>10</sup> 0 |
| - |                | 6               | 9              | 3               |
|   | 0              | 3               | 0              | 7               |



| M              | C               | D              | U               |
|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| <sup>0</sup> 1 | <sup>10</sup> 0 | <sup>9</sup> 0 | <sup>10</sup> 0 |
| -              | 6               | 9              | 3               |
| 0              | 3               | 0              | 7               |

Neste tipo de operação, com a representação no ábaco de haste e no registro com os algarismos hindu-arábicos, é construído o significado do zero para garantir o valor posicional no Sistema de Numeração Decimal.

### 5.6) Dando significado ao algoritmo convencional com recurso da compensação

Este algoritmo é aplicável na mesma situação que a anterior, em que o minuendo é menor que o subtraendo. No entanto, para superar essa limitação, são feitas adições de um mesmo valor no minuendo e no subtraendo.

Um princípio matemático que sustenta essa operação é o fato de que a diferença entre o minuendo e o subtraendo não se altera quando a ambos é somado um valor.

Para deixar claro isso aos alunos, basta que o professor compare sua altura com a de um aluno. Em seguida, ambos sobem em duas cadeiras idênticas, de maneira que na altura de ambos foi somado o mesmo valor, e a diferença entre eles foi a mesma.

Algumas operações de subtração podem mostrar essa situação.

$$13 - 5 = (13 + 2) - (5 + 2) = 15 - 7 = 8$$

$$13 - 5 = (13 + 10) - (5 + 10) = 23 - 15 = 8$$

A seguir, encontra-se o passo a passo para a resolução da mesma subtração entre 763 e 289, envolvendo trocas nas unidades, dezenas e centenas, porém com este outro algoritmo, conhecido como resolução por compensação.

**1º passo** - Consiste na representação das parcelas a serem subtraídas.

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 289 \\ \hline \end{array}$$

| C | D | U |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 3 |
| - | 2 | 8 |
|   |   |   |

**2º passo** - É acrescida uma dezena no subtraendo e dez unidades no minuendo.

Diante da impossibilidade de subtrair 9 de 3, é acrescida uma dezena no subtraendo e dez unidades no minuendo. Com essa troca, o subtraendo fica com nove dezenas e o minuendo com treze unidades. Deve ser destacado que a ambos foram somados os mesmos valores, afinal uma dezena é equivalente a dez unidades.

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 289 \\ \hline \end{array}$$

| C | D | U |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 3 |
| - | 2 | 8 |
|   |   |   |

Uma dificuldade comumente apresentada pelos alunos nesta fase é a representação de que, com o 1 que é colocado nas unidades para ser lido, o 3 passa a ser lido como 13, enquanto isso não ocorre no minuendo, que não é lido como 18, mas sim 9. A superação dessa dificuldade ocorre com o devido uso do ábaco de haste.

É curioso perceber, nesse momento, a diferença das potencialidades de cada um dos recursos. Para a atribuição de significado, o ábaco de haste tem maior potencialidade, enquanto o QVL tem para a aproximação do registro formal do algoritmo escrito, conhecido como “conta ramada”.

**3º passo** - É feita a subtração nas unidades.

|       |   |   |   |  |
|-------|---|---|---|--|
|       |   |   |   |  |
|       | 7 | 6 | 3 |  |
| -     | 2 | 8 | 9 |  |
| <hr/> |   |   |   |  |
|       |   |   | 4 |  |

| C     | D | U |
|-------|---|---|
| 7     | 6 | 3 |
| -     | 2 | 8 |
| <hr/> |   |   |
|       |   | 4 |

**4º passo** - É acrescida uma centena no subtraendo e dez dezenas no minuendo.

Diante da impossibilidade de subtrair 9 de 6, é acrescida uma centena no subtraendo e dez dezenas no minuendo. Com essa troca, o subtraendo fica com nove dezenas e o minuendo com dezesseis unidades. Deve ser destacado que a ambos foram somados os mesmos valores, afinal uma dezena é equivalente a dez unidades.

|       |   |   |   |  |
|-------|---|---|---|--|
|       |   |   |   |  |
|       | 7 | 6 | 3 |  |
| -     | 2 | 8 | 9 |  |
| <hr/> |   |   |   |  |
|       |   |   | 4 |  |

| C     | D | U |
|-------|---|---|
| 7     | 6 | 3 |
| -     | 2 | 8 |
| <hr/> |   |   |
|       |   | 4 |

**5º passo** - É feita a subtração nas dezenas.

|       |  |   |    |    |
|-------|--|---|----|----|
|       |  |   |    |    |
|       |  | 7 | 16 | 13 |
| -     |  | 2 | 8  | 9  |
| <hr/> |  |   |    |    |
|       |  |   | 7  | 4  |

| C     | D  | U  |
|-------|----|----|
| 7     | 16 | 13 |
| -     | 2  | 8  |
| <hr/> |    |    |
|       | 7  | 4  |

**6º passo** - É feita a subtração nas centenas.

|       |  |   |    |    |
|-------|--|---|----|----|
|       |  |   |    |    |
|       |  | 7 | 16 | 13 |
| -     |  | 2 | 8  | 9  |
| <hr/> |  |   |    |    |
|       |  | 4 | 7  | 4  |

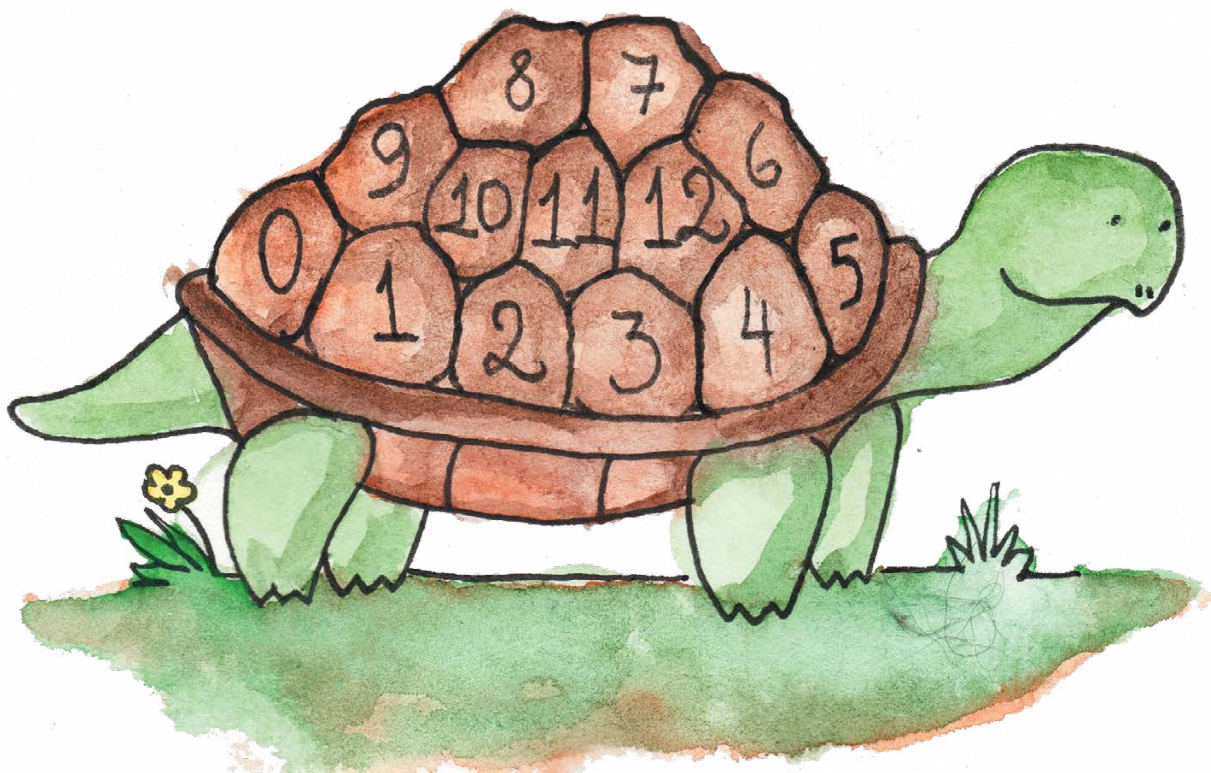
| C     | D  | U  |
|-------|----|----|
| 7     | 16 | 13 |
| -     | 2  | 8  |
| <hr/> |    |    |
| 4     | 7  | 4  |

Para planejar a continuidade, os exemplos apresentados a seguir trazem uma sugestão de sequência, que pode ser adequada para a operação de subtração:

- a) Subtrair 3 de 8
- b) Subtrair 5 de 17
- c) Subtrair 14 de 67
- d) Subtrair 154 de 235

Sequência até a ordem de milhar com trocas.

- a) Subtrair 7 de 15
- b) Subtrair 16 de 35
- c) Subtrair 45 de 72
- d) Subtrair 67 de 100
- e) Subtrair 253 de 541
- f) Subtrair 679 de 1623
- g) Subtrair 568 de 1000



### 5.7) Jogo da Tartaruga: exemplo de jogo envolvendo a adição e a subtração

O jogo a seguir é apenas um exemplo que requer adição e subtração ao mesmo tempo. Mas é também potente para a discussão sobre as probabilidades e previsão de resultados. Para isso, a problematização é muito importante, com perguntas como “quais são os números mais fáceis de serem preenchidos e por quê?”, “quais são os números mais difíceis de serem preenchidos? E por quê?” ou “para marcar o número 7, quais números devem sair nos dados e com qual operação?”

Não se pode esquecer que o jogo deve ser aplicado com uma intencionalidade pedagógica e com objetivos a serem cumpridos. Esses objetivos devem ser explicitados para os alunos.

#### **Materiais necessários**

Tabuleiro, marcadores e dois dados.

#### **Como se joga**

- As equipes jogam alternadamente.
- Cada equipe, na sua vez, joga os dados, calcula a soma ou a subtração dos valores obtidos e comunica este resultado à equipe adversária.
- Em seguida, coloca uma de suas fichas no espaço que contém o resultado da adição em seu tabuleiro.
- Se o resultado obtido já estiver coberto por uma ficha, a equipe passa a sua vez.
- Se uma das equipes cometer um erro no cálculo de um resultado, e o adversário apontar o engano antes de realizar a sua jogada, este tem o direito de retirar uma ficha qualquer do tabuleiro do outro.
- Ganha a equipe que preencher o seu tabuleiro primeiro.

Fonte: Borim, Júlia. Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática. 4 edição. São Paulo: IME-USP, 1996.

Abstract background featuring large, stylized white numbers and mathematical symbols (including plus, minus, multiplication, division, and equals signs) overlaid on a red field. The background has a repeating pattern of small, faint numbers and symbols, creating a dense, digital aesthetic.



## Multiplicação com números naturais

---

No trabalho que tem por objetivo dar significado aos algoritmos convencionais da multiplicação, os significados da multiplicação precisam estar consolidados nos alunos. Inicialmente, com esse propósito, a multiplicação com o significado de soma de parcelas iguais ajuda nessa consolidação. Para isso, o uso do material dourado associado ao QVL pode ser um recurso potente, caso alunos ainda apresentem dificuldades com esses conceitos.

Neste ponto, uma discussão frequente é a questão da memorização das “tabuadas de multiplicação”. Como todo o processo desenvolvido até agora, é desejável que os fatos de multiplicação sejam sim memorizados, porém de forma que este seja o resultado de um processo no qual os alunos atribuam significado à multiplicação enquanto uma operação numérica. O domínio dos fatos fundamentais, tal como propõe Walle (2009), é importante para que os alunos não vejam isso como um obstáculo para o desenvolvimento de raciocínios que envolvam a multiplicação.

### 6.1) Conversas matemáticas para desenvolver o pensamento aritmético da multiplicação

Humphreys e Parker (2019) apresentam quatro estratégias para a multiplicação:

1. Decompor um fator em duas ou mais parcelas.

“Dividi 16 em 10 e 6. Primeiro, multipliquei 10 vezes 12 e obtive 120. A seguir, multipliquei 6 vezes 12 e obtive 72. Depois adicionei 120 a 72 e obtive 192.”

$$12 \times 16$$

$$\begin{aligned} 12 \times 16 &= 12 \times (10 + 6) \\ &= (10 + 6) \times 12 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 10 \times 12 = 120 \\ 6 \times 12 = 72 \\ \hline 192 \end{array}$$

## 2. Fatorar um fator.

"Sei que 16 é igual a 4 vezes 2 vezes 2. Primeiro fiz 4 vezes 12 e o resultado foi 48. Depois fiz 48 vezes 2 e obtive 96. E então fiz 96 vezes 2 e obtive 192."

$$12 \times 16$$

$$12 \times 16 = 12 \times (4 \times 2 \times 2)$$

$$12 \times 4 = 48$$

$$\times 2$$

$$96 \times 2 = 192$$

Caso os alunos estejam prontos para uma conexão explícita com um registro mais simbólico, também podemos registrar assim, para enfatizar a propriedade associativa da multiplicação:

$$12 \times 16$$

$$12 \times 16 = 12 \times (4 \times 2 \times 2)$$

$$= (12 \times 4) \times (2 \times 2)$$

$$= 48 \times (2 \times 2)$$

$$= (48 \times 2) \times 2$$

$$= 96 \times 2$$

$$= 192$$

## 3. Arredondar um fator e ajustar.

"Arredondei 16 para 20 e fiz 12 vezes 20 e obtive 240. Depois, retirei quatro números 12, ou 48. Retirei 40 de 240 e obtive 200; então retirei mais 8 e obtive uma resposta de 192".

$$12 \times 16$$

$$16 = 20 - 4$$

$$12 \times 20 = 240$$

$$12 \times 4 = 48$$

$$240 - 40 = 200$$

$$200 - 8 = 192$$

ou

$$12 \times 16$$

$$12 \times (20 - 4)$$

$$(12 \times 20) - (12 \times 4)$$

$$240 - 48$$

$$192$$

## 4. Dividir pela metade e dobrar.

"Dupliquei 12 e dividi 16 pela metade, então mudei o problema para 24 vezes 8. Depois, continuei dividindo pela metade e dobrando; então obtive 48 vezes 4 e depois 96 vezes 2, e minha resposta é 192."

$$12 \times 16$$

$$12 \times 16 = 24 \times 8$$

$$= 48 \times 4$$

$$= 96 \times 2$$

$$= 192$$

## 6.2) Estratégias para desenvolvimento dos fatos multiplicativos propostos por Walle (2009)

Na mesma perspectiva de valorizar os pensamentos numéricos dos alunos antes de atribuir significado aos algoritmos tradicionais, Walle (2009) propõe cinco estratégias para desenvolver os fatos multiplicativos com significado.

### ► Dobros

Os fatos multiplicativos se caracterizam por ter o 2 como um fator e os pensamentos a eles associados são equivalentes aos fatos aditivos associados ao dobro, por isso, já devem ser conhecidos pelos alunos nessa fase.

Uma sugestão dada por Walle (2009, p. 203) é que, mais uma vez, sejam explorados fatos nos quais a propriedade comutativa esteja envolvida, como por exemplo  $2 \times 7$  e  $7 \times 2$ . Os alunos devem perceber que os resultados dessas multiplicações têm o mesmo valor como resultado, no entanto devem ter claro que seus significados são diferentes. Para isso, problemas devem ser propostos quando o fator 2 for o número de conjuntos de sete elementos e quando o fator 7 for o número de conjuntos com 2 elementos.

| x | 0 | 1 | 2  | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|
| 0 |   |   | 0  |   |   |    |    |    |    |    |
| 1 |   |   | 2  |   |   |    |    |    |    |    |
| 2 | 0 | 2 | 4  | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 |   |   | 6  |   |   |    |    |    |    |    |
| 4 |   |   | 8  |   |   |    |    |    |    |    |
| 5 |   |   | 10 |   |   |    |    |    |    |    |
| 6 |   |   | 12 |   |   |    |    |    |    |    |
| 7 |   |   | 14 |   |   |    |    |    |    |    |
| 8 |   |   | 16 |   |   |    |    |    |    |    |
| 9 |   |   | 18 |   |   |    |    |    |    |    |

### ► Fatos com cinco

Os fatos que compõem este grupo se caracterizam por ter o número 5 em um dos fatores. Essa prática pode ser feita pela contagem de cinco em cinco elementos até 45. Em seguida essa contagem pode associada a fileiras de cinco pontos.

Walle (2009, p. 204) sugere também uma associação aos fatos contidos nos relógios analógicos.

#### Fatos fundamentais de relógios

Concentre-se no ponteiro dos minutos de um relógio.

Quando ele aponta para um número, quantos minutos depois da hora isso representa? Desenhe um grande modelo de relógio e aponte para os números de 1 a 9 em ordem randômica. Os alunos devem responder com os minutos correspondentes. Agora associe essa ideia aos fatos multiplicativos com 5. Levante um cartão-flash e então aponte para o número no relógio correspondente ao outro fator. Desse modo, os fatos de cinco se tornam o “registro dos fatos fundamentais do relógio”.

| x | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 |   |   |    |    |    | 0  |    |    |    |    |
| 1 |   |   |    |    |    | 5  |    |    |    |    |
| 2 |   |   |    |    |    | 10 |    |    |    |    |
| 3 |   |   |    |    |    | 15 |    |    |    |    |
| 4 |   |   |    |    |    | 20 |    |    |    |    |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 |   |   |    |    |    | 30 |    |    |    |    |
| 7 |   |   |    |    |    | 35 |    |    |    |    |
| 8 |   |   |    |    |    | 40 |    |    |    |    |
| 9 |   |   |    |    |    | 45 |    |    |    |    |

### ► Zeros e unidades

Há trinta e seis fatos que têm pelo menos um fator que é 0 ou 1. Apesar de serem aparentemente fáceis, eles precisam ter um contexto para regras como “qualquer número multiplicado por zero é zero” ou “qualquer número multiplicado por um resulta nele mesmo”. São os alunos que precisam chegar a essas conclusões.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 | 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 | 7 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8 | 0 | 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9 | 0 | 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |

### ► Padrão dos noves

Os fatos nos quais o número 9 é um dos fatores podem ser explorados com o uso do pensamento algébrico. Há dois padrões de regularidade a serem explorados. O primeiro padrão consiste em perceber que o algarismo da dezena é sempre um a menos que o do outro fator. O segundo padrão é que a soma dos dois algarismos do produto é sempre 9.”

Para essa exploração, Walle (2009, p. 205) sugere a seguinte tarefa:

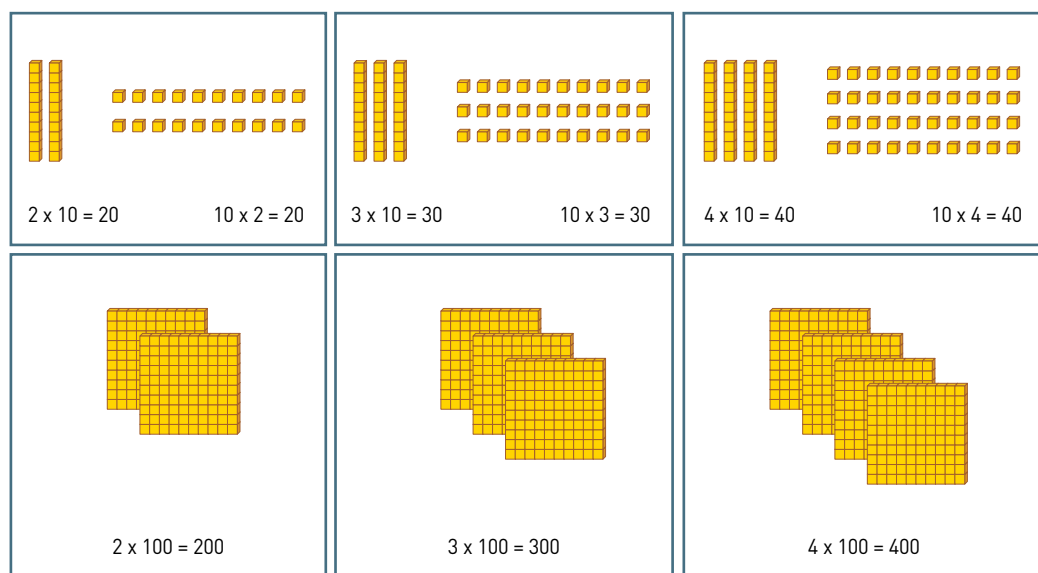
| x | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 0  |
| 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 9  |
| 2 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 18 |
| 3 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 27 |
| 4 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 36 |
| 5 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 45 |
| 6 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 54 |
| 7 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 63 |
| 8 |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 72 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

#### Padrões nos fatos multiplicativos dos noves

Em formato de coluna, escreva a tabela multiplicativa dos noves no quadro ( $9 \times 1 = 9$ ;  $9 \times 2 = 18$ ; ...  $9 \times 9 = 81$ ). A tarefa é descobrir tantos padrões quanto possível na tabela. (Não peça aos alunos para pensarem em uma estratégia.) Ao escutar os estudantes trabalhando nessa tarefa, verifique se em algum lugar na turma os dois padrões necessários para a estratégia foram descobertos. Após discutir todos os padrões, uma tarefa seguinte seria usar os padrões para pensar sobre um modo inteligente para descobrir um fato de noves que você ainda não conheça. (Observe que até para estudantes que sabem os fatos dos noves, essa tarefa ainda permanece válida.)

### 6.3) Propriedades matemáticas para a multiplicação por múltiplos de 10

Outras multiplicações importantes a serem construídas pelos alunos, tal como os fatos multiplicativos anteriores, são aquelas em que um dos fatores é um múltiplo de 10. Ou seja, são as multiplicações por 10, 100 e 1000. Mais uma vez, a regra “acrescentar o zero” não deve ser dada aos alunos. Estas são propriedades que os alunos devem descobrir por si sós. Para isso, tarefas envolvendo a manipulação com material dourado, e que permitem a eles descobrirem essa regularidade, podem ser potentes.



### 6.4) Outras estratégias para multiplicação

Construídos esses conhecimentos sobre os fatos fundamentais, muitas estratégias podem ser elaboradas para desenvolver as multiplicações, tais como:

- $6 \times 9$  é o mesmo que  $6 \times 10$  menos 6, assim como  $7 \times 9$  é o mesmo que  $7 \times 10$  menos 7.
- $3 \times 7$  está associado ao dobro de 7 ( $2 \times 7$ ) mais 7, assim como  $3 \times 9$  está associado ao dobro de 9 ( $2 \times 9$ ) mais 9.
- $4 \times 7$  está associado ao dobro do dobro de 7 ( $2 \times (2 \times 7)$ ), assim como  $4 \times 9$  está associado ao dobro do dobro de 9 ( $2 \times (2 \times 9)$ ).
- $8 \times 7$  está associado ao dobro do dobro do dobro de 7 ( $2 \times (2 \times (2 \times 7))$ ), assim como  $8 \times 9$  está associado ao dobro do dobro do dobro de 9 ( $2 \times (2 \times (2 \times 9))$ ).
- $6 \times 8$  está associado ao dobro de  $3 \times 8$ , assim como  $6 \times 9$  está associado ao dobro de  $3 \times 9$ .

## 6.5) Dando significado ao algoritmo convencional da multiplicação

Para a multiplicação de um fator de um algarismo por outro de dois ou três algarismos, os conhecimentos dos fatos podem ser aplicados, porém associados com a decomposição dos números.

$$13 \times 3 = (10 + 3) \times 3 = 30 + 9 = 39$$

ou

$$3 \times 13 = 3 \times (10 + 3) = 30 + 9 = 39$$



$$3 \times 13 =$$



$$3 \times (10 + 3) =$$

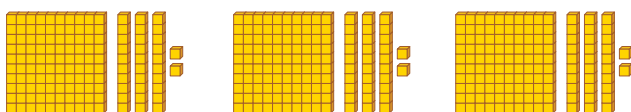


$$30 + 9 = 39$$

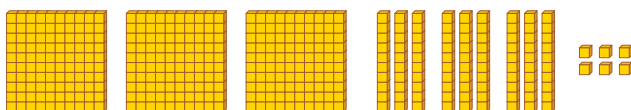
$$132 \times 3 = (100 + 30 + 2) \times 3 = 300 + 90 + 6 = 396$$

ou

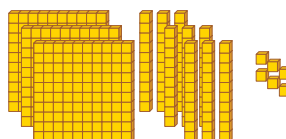
$$3 \times 132 = 3 \times (100 + 30 + 2) = 300 + 90 + 6 = 396$$



$$3 \times 132 =$$



$$3 \times (100 + 30 + 2) =$$



$$300 + 90 + 6 = 396$$

Esses procedimentos, registrados no QVL, ajudam a dar significado ao algoritmo tradicional.

| $\begin{array}{r} \phantom{000}132 \\ \times \phantom{00}3 \\ \hline \end{array}$                                                                                                                                                                                                                                        |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|--|---|---|--|---|---|---|
| <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr> <td></td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>+</td><td></td><td>9</td><td>0</td></tr> <tr> <td></td><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr> </tbody> </table> |   |   |   |  | C | D | U | x | 1 | 3 | 2 |  | 3 | 0 | 0 | + |  | 9 | 0 |  | 3 | 9 | 6 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | C | D | U |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
| x                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1 | 3 | 2 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3 | 0 | 0 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
| +                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   | 9 | 0 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3 | 9 | 6 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr> <td></td><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr> </tbody> </table>                                                                                                     |   |   |   |  | C | D | U | x | 1 | 3 | 2 |  | 3 | 9 | 6 |   |  |   |   |  |   |   |   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | C | D | U |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
| x                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1 | 3 | 2 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3 | 9 | 6 |  |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |   |   |  |   |   |   |

Tais procedimentos são também válidos para as multiplicações em que ambos os fatores são compostos por dois ou mais algarismos.

$$23 \times 12 =$$

$$(20 + 3) \times (10 + 2) =$$

$$(20 + 3) \times 10 + (20 + 3) \times 2 =$$

$$200 + 30 + 40 + 6 =$$

$$200 + 70 + 6 =$$

$$276$$

$23 \times 12 =$

$(20 + 3) \times 12 = (20 + 3) \times (10 + 2)$

$200 + 70 + 6 = 276$

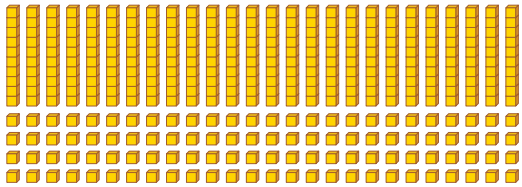
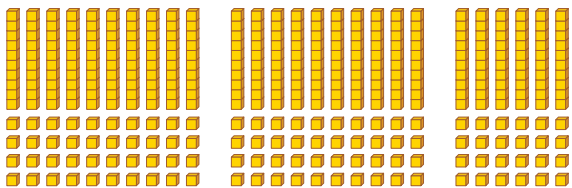
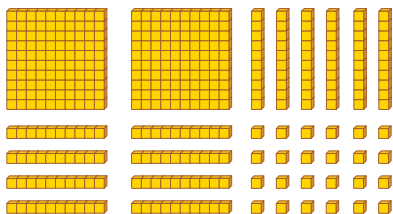
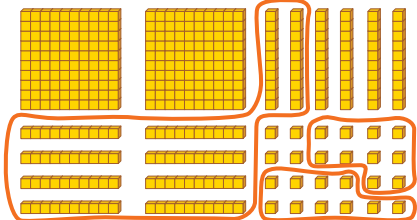
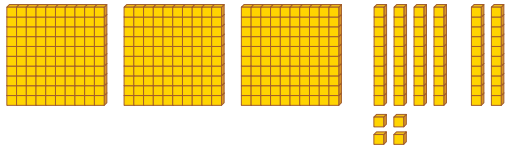
Esses procedimentos, registrados no QVL, ajudam a dar significado ao algoritmo tradicional.

| $\begin{array}{r} \phantom{00}132 \\ \times \phantom{00}3 \\ \hline \end{array}$ | <table> <tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>+</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr> </table>                                                                              | C | D | U | 1 | 3 | 2 | x |  | 3 | 3 | 0 | 0 | + |   | 6 | 3 | 9 | 6 | <table> <tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr> </table> | C | D | U | 1 | 3 | 2                                                                                                                                                                              | x |   | 3 | 3 | 9 | 6 |   |  |   |   |   |   |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|
| C                                                                                | D                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | U |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 1                                                                                | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| x                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 3                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| +                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 3                                                                                | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| C                                                                                | D                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | U |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 1                                                                                | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| x                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 3                                                                                | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| $\begin{array}{r} \phantom{00}23 \\ \times \phantom{00}12 \\ \hline \end{array}$ | <table> <tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>+</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table> | C | D | U |   | 2 | 3 | x |  | 2 | 2 | 0 | 0 |   | 3 | 0 |   | 4 | 0 | +                                                                                                                                                                               |   | 6 | 2 | 7 | 6 | <table> <tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table> | C | D | U |   | 2 | 3 | x |  | 2 | 2 | 7 | 6 |
| C                                                                                | D                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | U |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
|                                                                                  | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| x                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 2                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
|                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
|                                                                                  | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| +                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 2                                                                                | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| C                                                                                | D                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | U |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
|                                                                                  | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| x                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |
| 2                                                                                | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 6 |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |

Note-se que o significado da configuração retangular pode ser um resultado desse processo. A compreensão dessa ideia e desse tipo de representação, que usa o material dourado, é importante, pois ambas serão essenciais para facilitar a compreensão de propriedades relacionadas à operação com expressões algébricas.

Muitos professores aproveitam esse momento do ensino para explorar os conceitos de área e lados. Uma decisão que pode ser acertada, desde que o número das unidades não seja confundido com a medida dos lados dos retângulos formados.

Deve ser observado que todas as multiplicações realizadas nos procedimentos anteriores resultaram em números menores que 10 e, por isso, as trocas não são requeridas. No entanto, quando tais trocas forem necessárias, os procedimentos serão exatamente os mesmos, não só em relação à multiplicação, mas também à adição.

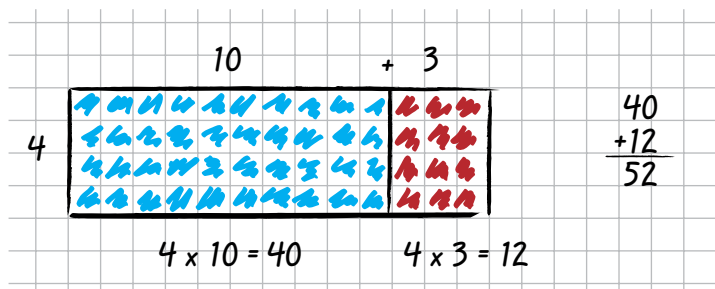
|                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $26 \times 14 =$ $(20 + 6) \times (10 + 4) =$ $(20 + 6) \times 10 + (20 + 6) \times 4 =$ $200 + 60 + 80 + 24 =$ $200 + 140 + 24 =$ $200 + (100 + 40) + (20 + 4) =$ $200 + 100 + 40 + 20 + 4 =$ $300 + 60 + 4 =$ $364$ |    |
|                                                                                                                                                                                                                       |    |
|                                                                                                                                                                                                                       |     |
|                                                                                                                                                                                                                       |    |
|                                                                                                                                                                                                                       |  |

A sequência de exemplos a seguir, envolvendo multiplicações, pode ser uma sugestão para planejar a continuidade do trabalho:

- Multiplique 4 por 2.
- Multiplique 4 por 3.
- Multiplique 5 por 17.
- Multiplique 12 por 13.
- Multiplique 13 por 15.

## 6.6) Representação geométrica da multiplicação

Após um trabalho no qual foi atribuído significado à decomposição e operação entre os fatores da multiplicação com o material dourado, é necessário que os alunos consigam visualizar essas operações mentalmente. Para isso, a representação dessas construções, envolvendo o material dourado, pode ser feita em malhas quadriculadas (folhas de papel quadriculado). A representação da decomposição e operações entre os fatores é exemplificada a seguir:



Neste exemplo houve a representação da decomposição de um dos fatores ( $13 = 10 + 3$ ) e foram feitas três operações, sendo duas delas de multiplicação (com o significado da configuração retangular) e uma adição.

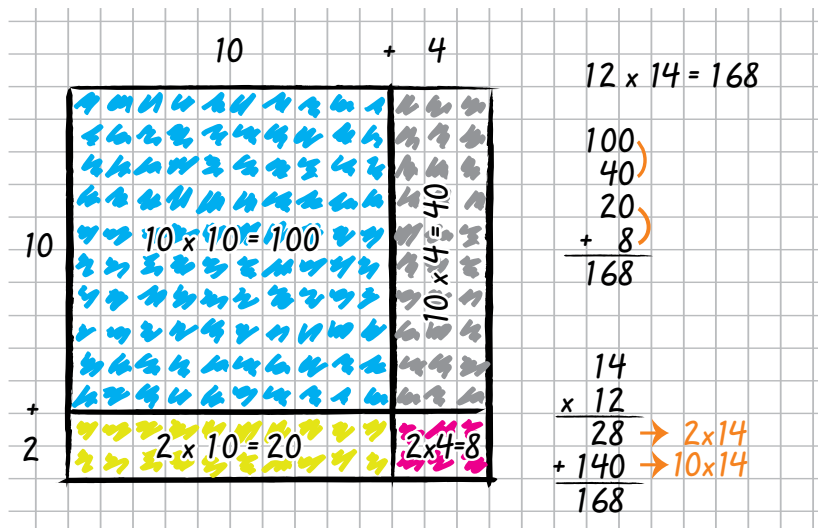
Esta é uma etapa delicada porque o que é usado na decomposição é o número de quadradinhos e isso implica que um mesmo quadradinho é contado duas vezes (uma vez na contagem do 10 e outra na contagem do 4).

Outra armadilha didática dessa etapa, por se tratar de uma representação geométrica, ocorre quando os quadradinhos são considerados tanto como área (no momento da contagem, uma vez que recobrem uma superfície) quanto como medida de seu lado (no caso, um comprimento). Área e comprimento são grandezas diferentes e devem ser consideradas em todo o processo de escolarização.

A importância dessas duas considerações está no fato de que esses dois aspectos são vistos como obviedades pelos professores e, por isso, sequer são mencionados, passando despercebidos. No entanto, não são visualizações óbvias para as crianças - e quando não são devidamente abordadas, em termos didáticos, passam a ser executadas como regras. Tais regras, sem significados, devem ser refutadas no ensino da Matemática, tal como é proposto neste curso.

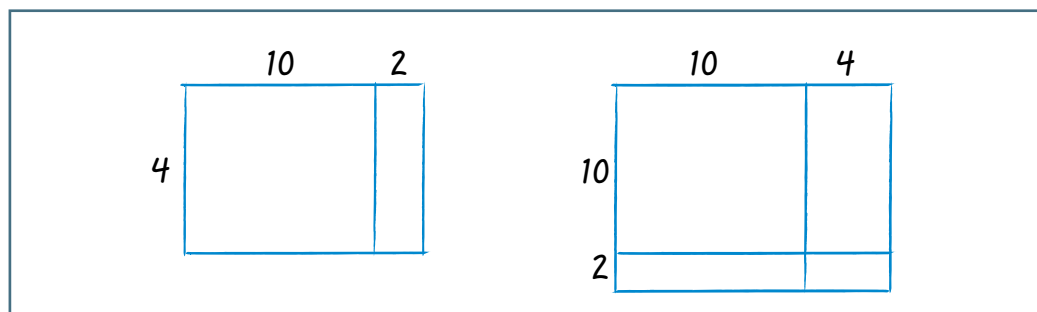
Muitas vezes, quando o trabalho com o Sistema de Numeração Decimal e com as operações aritméticas anteriores propiciou aprendizagens bem consolidadas, a manipulação com o material dourado para representar as operações da multiplicação pode ser mais célere e até ser suprimida, partindo diretamente para sua representação com as malhas quadriculadas.

O exemplo a seguir mostra os mesmos procedimentos de decomposição e operações aritméticas, porém com dois fatores com dois algarismos cada.



Deve ser observado, neste exemplo, que foram representadas duas decomposições ( $14 = 10 + 4$  e  $12 = 10 + 2$ ) e foram feitas cinco operações, sendo quatro delas de multiplicação (com o significado da configuração retangular) e uma adição.

Construída essa visualização (operação mental: concebe-se na mente uma imagem, vista depois, com os olhos fechados), representações mais simplificadas desses procedimentos devem ser usadas. Essas representações, sejam elas registradas no papel ou construídas em suas mentes, são como modelo geométrico, como mostra o quadro a seguir.



Apesar dessas representações serem validadas apenas para as multiplicações que envolvam fatores com até dois algarismos (a partir disso seria necessária uma representação bidimensional de sólidos geométricos com faces retangulares), elas são essenciais para o desenvolvimento da habilidade de cálculo mental das multiplicações.

## 6.7) Algoritmos da multiplicação presentes em outras culturas na história da Humanidade

Buscar o entendimento dos algoritmos desenvolvidos em outras culturas pode ajudar a consolidar a aprendizagem e certamente vai ampliar o repertório cultural dos alunos, desmitificando o jeito único de fazer as operações. Mostra também o quanto as diferentes culturas e contextos levam a procedimentos de cálculos diferentes.

### • Método árabe



A origem deste algoritmo não é certa, mas sabe-se que ele percorreu diversas culturas ao longo da história. Pode ser também a origem do algoritmo convencional, tal como o conhecemos hoje. Uma das hipóteses é que ele foi desenvolvido na Índia e sua difusão pelo Ocidente teria ocorrido na época do mercantilismo. É conhecido como gelosia, nome dado à malha quadriculada de madeiras dispostas diagonalmente nas antigas janelas.

Para sua resolução é necessário apenas o domínio dos fatos fundamentais da multiplicação.

Para determinar o produto de 128 e 34 é feita uma malha quadriculada com três colunas e duas linhas, correspondentes ao número de algarismos de cada um dos fatores. Esses quadrados, chamados de células, são divididos diagonalmente.

| 1 | 2 | 8 |   |
|---|---|---|---|
|   |   |   | 3 |
|   |   |   | 4 |

Cada uma das células é preenchida pelos fatos multiplicativos correspondentes a cada um dos algarismos dos fatores colocados ao lado da gelosia.

| 1 | 2 | 8 |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 3 |
| 1 | 6 | 4 |   |
| 0 | 0 | 3 | 4 |
| 4 | 8 | 2 |   |

Em seguida, os números de cada uma das diagonais são somados. Nesse momento, é possível perceber a semelhança na forma de representação desse algoritmo com aqueles feitos no QVL.

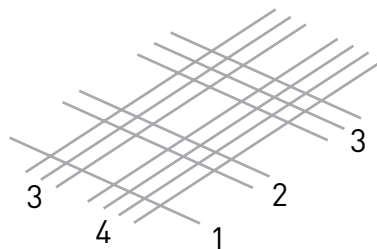
|   | 1  | 2  | 8 |   |
|---|----|----|---|---|
| 0 | 0  | 0  | 2 | 3 |
| 1 | 1  | 6  | 4 |   |
| 0 | 0  | 0  | 3 | 4 |
| 4 | 4  | 8  | 2 |   |
| 2 | 12 | 15 | 2 |   |
| 3 |    | 5  |   |   |

### • Método chinês

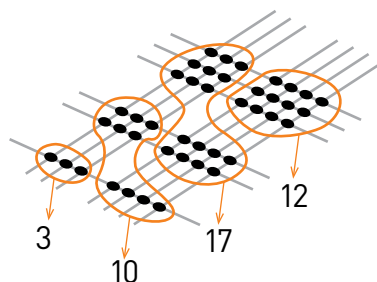
Há indícios históricos que sugerem que em tempos mais remotos chineses usavam varas de bambus para efetuar multiplicações. Esse método não requer o conhecimento dos fatos multiplicativos, mas sim do valor posicional dos números.

O número de varetas é correspondente ao valor posicional de cada um dos fatores.

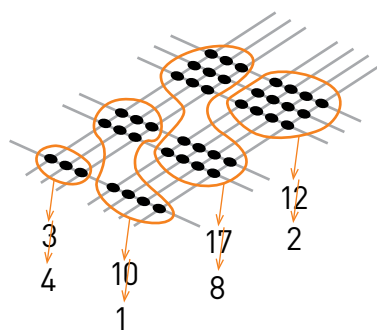
Assim, para a multiplicação de 123 por 34 é feita a disposição ao lado.



Em seguida é feita a contagem das intersecções dessas varetas, agrupadas pelas intersecções dos algarismos.



O agrupamento que resultou em 12 corresponde ao produto de unidades com unidades. O agrupamento com 17 intersecções corresponde ao produto de unidades com dezenas, resultado em dezenas. O agrupamento com 10 elementos corresponde ao produto de dezenas por dezenas, que resulta em centenas; finalmente, o agrupamento com 3 intersecções corresponde ao produto de dezena por centena, resultando na ordem de milhar. Após essa contagem, as trocas são feitas, tal como seria notado em um QVL.



Assim, a multiplicação de 34 por 123 tem o valor de 4182 como produto.

### • Método egípcio

Dentre os antigos egípcios o procedimento de multiplicar era baseado em dobros sucessivos e somas. Um primeiro passo era verificar qual seria a composição pela soma de dobros sucessivos de um dos fatores. Em seguida, quais seriam os dobros do outro fator correspondentes à composição do primeiro.

Os egípcios sabiam que um número qualquer tem uma única composição por soma de dobros.

Por exemplo, 14 é igual a  $2 + 4 + 8$ , assim como 23 é igual  $1 + 2 + 4 + 16$ .

Para efetuar a multiplicação de 26 por 14:

- 1º passo - Perceber que o número 26 (um dos fatores) é igual a  $2 + 8 + 16$ ;
- 2º passo - Relacionar os dobros de 14 (o outro fator) até 16.

| Dobros de 1 | Dobros de 14 |
|-------------|--------------|
| 1           | 14           |
| 2           | 28           |
| 4           | 56           |
| 8           | 112          |
| 16          | 224          |

- 3º passo - Somar os dobros de 14 correspondentes aos dobros de 1, cuja soma resulta em 26, desconsiderando os demais.

| Dobros de 1  | Dobros de 14  |
|--------------|---------------|
| <del>1</del> | <del>14</del> |
| 2            | <b>28</b>     |
| <del>4</del> | <del>56</del> |
| 8            | <b>112</b>    |
| 16           | <b>224</b>    |

Ou seja,  $26 \times 14 = 28 + 112 + 224 = 364$

- **Método dos camponeses russos**

Trata-se de um algoritmo bastante simples. Consiste em construir uma tabela e colocar, na primeira coluna, a divisão por dois de um dos fatores, desconsiderando o resto dessa divisão, até que ela resulte em um. Na coluna dois, é colocado o dobro do outro fator.

| 41 | 13  |
|----|-----|
| 20 | 26  |
| 10 | 52  |
| 5  | 104 |
| 2  | 208 |
| 1  | 416 |

Em seguida são somados apenas os números da segunda coluna correspondes aos números ímpares da primeira coluna.

| 41            | 13             |
|---------------|----------------|
| <del>20</del> | <del>26</del>  |
| <del>10</del> | <del>52</del>  |
| <b>5</b>      | <b>104</b>     |
| <del>2</del>  | <del>208</del> |
| <b>1</b>      | <b>416</b>     |

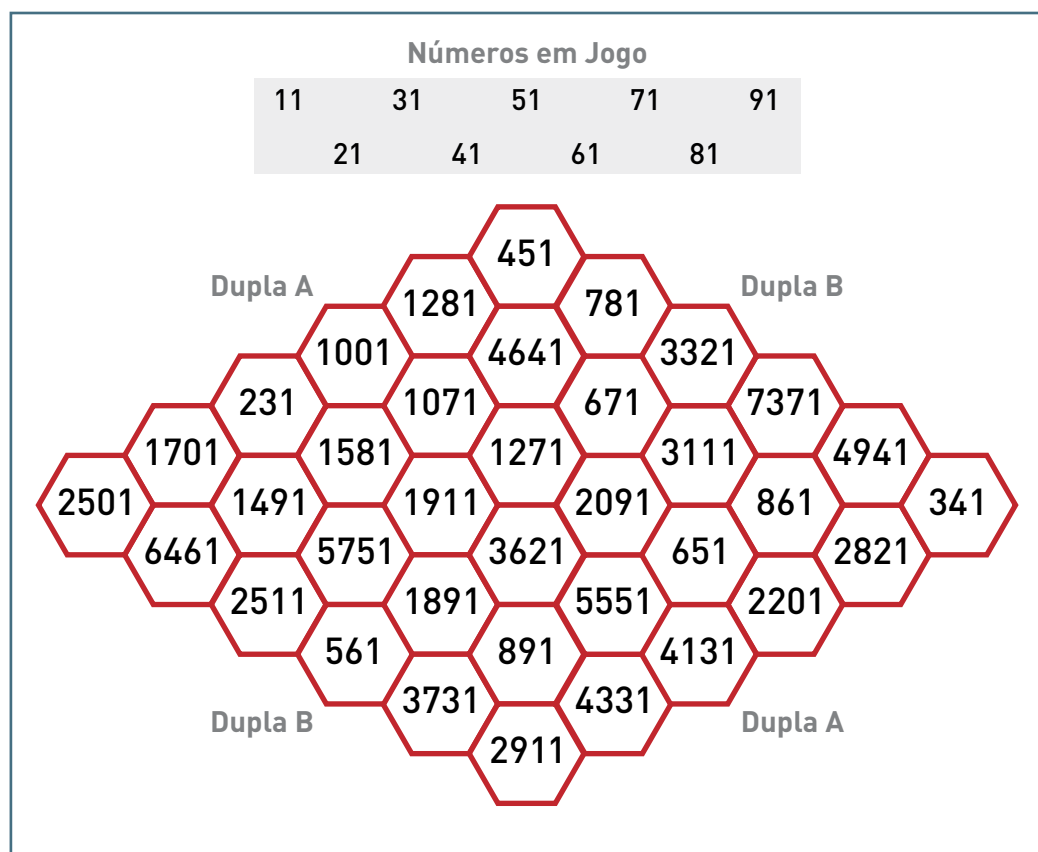
Ou seja,  $41 \times 13 = 13 + 104 + 416 = 533$

## 6.8) Números em Jogo: exemplo de jogo envolvendo a multiplicação

Neste jogo, que envolve a multiplicação, é interessante destacar as orientações dadas ao professor, o que evidencia a importância de seu papel quando escolhe essa estratégia de ensino para cumprir seus objetivos pedagógicos.

O jogo se caracteriza pelo uso de estratégias, por isso, os alunos devem ser estimulados a não apenas fazer as marcações, mas principalmente explicitarem as estratégias.

Quando os jogos são usados na sala de aula, a competição é inevitável, no entanto, a vitória não deve ser enaltecida. O que mais importa é a aprendizagem. Por isso, os alunos devem ser estimulados a ajudar os colegas, uma vez que a maior vitória, nesses momentos, é a máxima aprendizagem possível e de todos. Essa frase ("a máxima aprendizagem possível e de todos") é a que melhor retrata a excelência em educação, pois esse propósito é o que torna real a equidade na educação e na aprendizagem matemática.



### Objetivos

Trabalhar com o conceito de divisão de números naturais e desenvolver processos de estimativa e cálculo mental.

## **Materiais necessários**

Marcadores de dois tipos diferentes, sendo um tipo para cada dupla (ex: milho, feijão, botões etc.).

## **Como se joga**

- Os jogadores decidem quem começa.
- Os jogadores jogam alternadamente.
- Em cada rodada, o jogador escolhe dois dos “Números do jogo” (que constam no alto da ficha) e multiplica-os entre si. Se o resultado obtido estiver numa casa do tabuleiro que não esteja ocupada por um marcador, ele coloca um de seus marcadores nessa casa. Se a casa já estiver ocupada, não pode colocar nenhuma marca e perde a vez de jogar. Em cada casa pode ser colocado um marcador.
- Ganha a dupla que primeiro conseguir ligar suas duas bordas do tabuleiro com seus marcadores, sem nenhuma marca do oponente intercalada.

## **Orientações aos professores**

- 1) É importante que enquanto os alunos jogam o professor circule pela sala para observar não apenas como compreendem as regras, mas também como se comportam em relação a estimativas, tabuadas e ao algoritmo da multiplicação.
- 2) Provavelmente, na primeira vez que jogarem, haverá tumulto, incompreensão quanto às regras etc. Caso isso ocorra, sugere-se recorrer a alguma das alternativas: jogar uma vez com toda a classe em círculo, com um grande tabuleiro colocado no centro da roda; ou jogar com dois grupos, enquanto os demais fazem outra atividade; depois com mais dois grupos, até que todos os grupos possam jogar ao mesmo tempo.
- 3) Recomenda-se jogar esse jogo três vezes, uma vez a cada semana. Na primeira vez, sugere-se observar e anotar quais alunos não tiveram dúvida alguma e compreenderam as regras, pois eles podem auxiliar os outros. Na segunda vez que propuser o jogo, o professor deve colocar esses alunos em grupos separados, para que auxiliem os colegas. Certamente, dessa vez, o tumulto será menor.
- 4) É importante observar os avanços dos alunos e chamar a atenção deles para as estratégias que eles vão desenvolvendo para ganhar o jogo. O professor pode anotar suas observações, que poderão servir de referência para a avaliação da aprendizagem.

Fonte: Secretaria de Educação do Estado do Paraná. Acessível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=57>

[illegible]

# 7

## Divisão com números naturais

---

A divisão é uma das operações aritméticas que requer maior cuidado para que sua aprendizagem ocorra. É certo que se trata da operação mais complexa, por envolver as demais operações e ainda exigir a habilidade de fazer estimativas. No entanto, ser mais complexa não significa ser mais complicada. Ao contrário, trata-se de uma operação tão simples quanto as demais.

Uma característica da divisão está no fato de que, enquanto as demais operações têm significados diferentes, que dependem do contexto onde estão requeridas, a divisão, por vezes, sobretudo em seus procedimentos algorítmicos, requer o uso de seus dois significados. Ou seja, a divisão pode ter o significado de dividir em partes iguais ou o significado de medida, quando se determina o quanto cabe.

Apresenta-se nas páginas seguintes uma sequência de procedimentos para construir significados para a divisão. Nessa sequência serão requeridos e construídos os dois significados da divisão, o uso de distintos recursos didáticos e, ainda, será explicitada a necessidade de aplicação das outras operações aritméticas, assim como as habilidades para fazer estimativas. Cada um desses elementos será retomado ao final desta sequência.

## 7.1) Conversas matemáticas para desenvolver o pensamento aritmético da divisão

Humphreys e Parker (2019) apresentam quatro estratégias para desenvolver as conversas numéricas relacionadas à divisão.

1. Em vez de dividir, multiplicar.

“Sei que 3 vezes 5 é 15, então tenho 5 grupos de 3; então ainda restam 2; portanto, a minha resposta é 5, e restam 2.”

2. Tirar uma parte.

“Eu disse que 10 vezes 30 é 300, então 20 vezes 30 é 600, então tirei 20 grupos de 30 (ou 600) de 643 e restou 43. Retirei mais um grupo de 30 e me restou 13, então acrescentei 20 [grupos de 30] e 1 [grupo de 30] e obtive 21 grupos de 30 com 13 restando de outro grupo de 30.”

$$\begin{array}{r} 643 \\ - 600 \\ \hline 43 \\ - 30 \\ \hline 13 \end{array}$$

20 vezes 30 é 600

1 vez 30 é 30

restam 13 de 30

3. Fazer uma torre.

“Comecei fazendo uma torre de múltiplos de 13: 13, 26, 39, 52. Multipliquei 52 por 10 e obtive 520, então formei 40 grupos de 13, ou 520, e me restou 11. Assim eu tinha 40 grupos de 13, restando 13.”

“Torre” de 13s

$$\begin{array}{r} \times 40 \quad 520 \\ \times 4 \quad 52 \\ \times 3 \quad 39 \\ \times 2 \quad 26 \\ \times 1 \quad 13 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 531 \div 13 \\ \underline{- 520} \quad 13 \\ 11 \end{array}$$

4. Reduzir pela metade e pela metade.

“Reduzi pela metade ambos os números e mudei o problema para 64 dividido por 16; depois novamente reduzi os dois pela metade e obtive 32 dividido por 8; então fiz isso mais uma vez e obtive 16 dividido por 4. Eu sabia que havia quatro números 4 em 16, portanto, minha resposta é 4.”

$$\begin{array}{l} 128 \div 32 \\ = 64 \div 16 \\ = 32 \div 8 \\ = 16 \div 4 \\ \quad \quad \quad \textcircled{4} \end{array}$$

## 7.2) Em busca do significado dos algoritmos convencionais da divisão

A seguir é apresentado um processo que deve ser desenvolvido etapa por etapa. Como poderá ser percebido, os dois significados da divisão estarão presentes. Por isso, ao serem desenvolvidos, esses significados devem ser percebidos.

### **1ª etapa** - *Fundamentos para uma distribuição em partes iguais*

A primeira etapa desse processo, que visa desenvolver o conhecimento acerca da divisão como operação aritmética, deve ter como objetivo desenvolver os elementos ligados ao significado de distribuição em partes iguais. É uma etapa que pode (e deveria) ocorrer desde a Educação Infantil, pois envolve apenas a contagem. Para isso, pode ser usado qualquer material que permita a contagem como recurso didático.

A tarefa matemática desta etapa propõe disponibilizar uma quantidade de objetos para um grupo de alunos e solicitar que façam a distribuição de objetos para todos os membros do grupo, de maneira que cada aluno receba a mesma quantidade de objetos.

Trata-se de uma tarefa simples, porém fundamental, pois todos os fundamentos da divisão estão presentes nela. Obviamente, não é esperado que todos sejam sistematizados neste momento, mas sim que as ideias sejam desenvolvidas. Esses elementos são destacados para que o professor os reconheça:

- a) O todo que será distribuído é o **dividendo**.
- b) O número de alunos que compõem o grupo é o **divisor**.
- c) O número de objetos que cada aluno recebe é o **quociente**, o resultado da divisão.
- d) O quanto sobra do todo (inicial), depois de feita a distribuição para todos os alunos que compõem o grupo, é o **resto** da divisão. Esse resto pode ser um número igual ou diferente de zero. O resto também deve ser um número menor que o número de alunos do grupo.
- e) **Iteração**. A iteração (não interação) é uma ação que é repetida até que uma determinada situação ocorra e impeça que essa condição seja atendida. Nessa tarefa, que tem como objetivo dividir um todo em partes iguais entre um número de alunos, ocorrem simultaneamente duas iterações. O primeiro conjunto de iterações é a sequência de subtrações feitas do todo até que a retirada não é mais possível, ou seja, quando o número de objetos que restou após a retirada é menor que número de alunos no grupo. O segundo conjunto de iterações é a sequência de somas que cada aluno do grupo faz quando determina o quanto recebeu.

- f) **Estimativa** é uma operação mental feita para determinar o quanto pode ser retirado do todo. Nas primeiras experiências com as tarefas dessa natureza, que envolvem um número pequeno de objetos a serem distribuídos, os alunos tendem a retirar do todo um objeto de cada vez. Porém, quando números maiores são envolvidos na tarefa, há uma tendência (desejada) de os alunos estimarem qual é o número que podem retirar do todo para diminuir as iterações. Essa estimativa envolve o número de objetos a serem distribuídos e o número de alunos do grupo. Uma possível pergunta que orienta essa estimativa é “quantos objetos posso retirar da mesa que permite cada aluno do grupo receber a mesma quantidade?”. Essa pergunta envolve noções de medida (quanto cabe?) e a multiplicação (a estimativa envolve o número de alunos do grupo e quanto cada um deve receber, de maneira que esse produto seja menor que o número de objetos a serem distribuídos).



Em geral, apenas os quatro primeiros elementos dessa tarefa (dividendo, divisor, quociente e resto) são enfatizados no processo de ensino. No entanto, as operações mentais que sustentam a divisão são os dois últimos (iteração e estimativa).

Outra observação importante está relacionada ao resto. A afirmação de que o resto é “quando não é mais possível dividir” é inadequada. A afirmação mais adequada é “não é mais possível dividir sem subdividir o que restou”. Esse cuidado é importante porque essa subdivisão ocorrerá quando for feita a divisão envolvendo números racionais e no ensino da matemática é importante que cada conhecimento construído não seja desqualificado na etapa seguinte.

## 2ª etapa - Representação e registro da distribuição em partes iguais

Assim como nas demais operações, o registro é parte essencial do processo. É o registro dos pensamentos dos alunos e as argumentações neles apoiadas que consolidam os conhecimentos construídos em cada etapa da aprendizagem.

Muitas formas de registro devem ser exploradas.

O registro numérico é um recurso importante para a atribuição de significados ao algoritmo euclidiano da divisão, convencionalmente ensinado no Brasil. A tabela a seguir pode ser um exemplo que ajude nesse registro.

**Se todos receberem a mesma quantidade de objetos, quantos cada um vai receber?**

Grupo formado por \_\_\_\_\_ alunos.

Na mesa há \_\_\_\_\_ objetos a serem distribuídos aos alunos do grupo.

| Etapa | Quantidade de objetos que há na mesa | Quantidade de objetos que cada aluno receberá | Quantidade de objetos retirados da mesa | Quantidade de objetos que restaram na mesa após a retirada |
|-------|--------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 2     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 3     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 4     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 5     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 6     |                                      |                                               |                                         |                                                            |
| 7     |                                      |                                               |                                         |                                                            |

Imagine a situação em que um grupo é formado por 4 alunos e são colocadas 37 tampinhas de garrafas para serem distribuídas, sendo um aluno encarregado de fazer a distribuição e todos os demais devem preencher suas próprias tabelas. O número de iterações a serem feitas dependerá da quantidade de tampinhas dadas a cada aluno em cada uma das etapas. Uma possibilidade está representada a seguir.

**Se todos receberem a mesma quantidade de objetos, quantos cada um vai receber?**

Grupo formado por 4 alunos.

Na mesa há 37 objetos a serem distribuídos aos alunos do grupo.

| Etapa | Quantidade de objetos que há na mesa | Quantidade de objetos que cada aluno receberá | Quantidade de objetos retirados da mesa | Quantidade de objetos que restaram na mesa após a retirada |
|-------|--------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1     | 37                                   | 1                                             | 4                                       | 33                                                         |
| 2     | 33                                   | 2                                             | 8                                       | 25                                                         |
| 3     | 25                                   | 1                                             | 4                                       | 21                                                         |
| 4     | 21                                   | 3                                             | 12                                      | 9                                                          |
| 5     | 9                                    | 2                                             | 8                                       | 1                                                          |
|       |                                      |                                               |                                         |                                                            |
|       |                                      | 9                                             |                                         |                                                            |

*Havia 37 tampinhas que foram igualmente distribuídas para 4 alunos do grupo. Cada aluno recebeu 9 tampinhas e restou 1.*

Nessa possibilidade, a distribuição foi feita em 5 etapas, ou seja, 5 iterações. Na primeira, o aluno optou por distribuir 1 tampinha para cada aluno; consequentemente, foram retiradas 4 tampinhas das 37 inicialmente existentes, restando 33. Este procedimento vai se repetindo até o instante em que a quantidade de tampinhas existentes na mesa não mais pode ser distribuída sem que haja a subdivisão da tampinha restante.

Os registros presentes na segunda, quarta e quinta colunas dessa tabela evidenciam as iterações que envolvem a subtração. Daí surge a ideia de que a divisão é também uma sequência de sucessivas subtrações. A determinação do quociente (resultado da divisão) resulta da iteração da soma.

**3ª etapa** - Uma forma resumida de representação evidenciando as iterações de subtração e soma presentes na divisão

Uma forma de registro mais ágil, por ser uma síntese da tabela mostrada na seção anterior, é denominada sistema americano, método americano ou método das subtrações sucessivas. Nele, o mesmo contexto em que se pretende distribuir igualmente 37 tampinhas entre 4 alunos seria a seguinte:

$$\begin{array}{r|l}
 37 & 4 \\
 - 4 & 1 \\
 \hline
 33 & 2 \\
 - 8 & \\
 \hline
 25 & 1 \\
 - 4 & \\
 \hline
 21 & 3 \\
 - 12 & \\
 \hline
 9 & 2 \\
 - 8 & \\
 \hline
 1 & 9
 \end{array}$$

Nesta fase, um aluno que domina os fatos fundamentais pode começar a estimar qual seria o melhor número a ser distribuído. Com esta estimativa, a pergunta que ele poderia fazer seria: “quantos 4 cabem em 37?”. Esta estimativa é importante porque evidencia a divisão como sendo a operação inversa da multiplicação.

Diante dessa pergunta, o aluno poderia fazer o seguinte registro dentro desse método, já trazendo grande aproximação ao método euclidiano (algoritmo convencional da divisão no Brasil):

$$\begin{array}{r|l}
 37 & 4 \\
 - 36 & 9 \\
 \hline
 1 &
 \end{array}$$

Outras formas de representação devem ser discutidas para a devida atribuição de significado.

$$\begin{array}{c}
 9 \\
 \nearrow \\
 37 \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \left. \begin{array}{c} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{array} \right\} 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 37 \div 4? \\
 37 = (9 \times 4) + 1
 \end{array}$$

**4ª etapa** - Sistematização do registro dos procedimentos para efetuar a divisão com números maiores e explorando a base 10

Esta etapa é conhecida por alguns como “Sistema de Divisão na Base 10”. Ele é semelhante ao sistema americano (ou método das divisões sucessivas), mas incorpora a distribuição das centenas, dezenas e unidades. Nesse momento, os recursos didáticos como material dourado, ábaco de haste e QVL devem ser retomados para ajudar os alunos na visualização e na atribuição de significado.

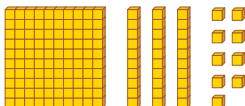
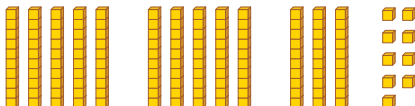
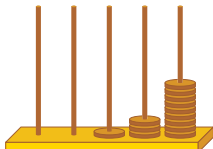
Números altos, na ordem de centena, devem ser usados nas tarefas propostas aos alunos. O objetivo nesta etapa é fazer com que eles pensem na quantidade a ser distribuída levando em consideração o valor posicional dos algarismos.

Os procedimentos para a divisão de 939 por 4 poderia ter a seguinte representação:

$$\begin{array}{r|l} 939 & 4 \\ - 400 & 100 \\ \hline 539 & \\ - 400 & 100 \\ \hline 139 & \\ - 40 & 10 \\ \hline 99 & \\ - 40 & 10 \\ \hline 59 & \\ - 40 & 10 \\ \hline 19 & \\ - 4 & 1 \\ \hline 15 & \\ - 4 & 1 \\ \hline 11 & \\ - 4 & 1 \\ \hline 7 & \\ - 4 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

É importante destacar que, após a distribuição da centena, o restante ficou sendo 139, um número que não permite a distribuição de mais uma centena. Nesse caso, o aluno deve passar a pensar em quantas dezenas podem ser distribuídas. Para isso, diante do número 139, a visualização que o aluno dever ter não é mais de 1 centena, 3 dezenas e 9 unidades, mas sim de 13 dezenas e 9 unidades.

A mesma habilidade de visualização o aluno deve ter quando não for mais possível a distribuição de dezenas. Nesse exemplo, diante do número 19, a visualização que o aluno dever ter não é mais de 1 dezena e 9 unidades, mas sim de 19 unidades. Essa habilidade relacionada às visualizações é também importante para alguns procedimentos de cálculo mental.

| Número representado                                                                           | Número visualizado                                                                 |   |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|--|----|---|
|              |  |   |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
|              |  |   |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
| <table><tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td></tr></table> | C                                                                                  | D | U | 1 | 3 | 9 | <table><tr><th>C</th><th>D</th><th>U</th></tr><tr><td></td><td>13</td><td>9</td></tr></table> | C | D | U |  | 13 | 9 |
| C                                                                                             | D                                                                                  | U |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
| 1                                                                                             | 3                                                                                  | 9 |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
| C                                                                                             | D                                                                                  | U |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |
|                                                                                               | 13                                                                                 | 9 |   |   |   |   |                                                                                               |   |   |   |  |    |   |

### 5ª etapa - Sistema de registro Base 10 com estimativa

Após algumas poucas experiências com o Sistema Base 10, o aluno irá começar a estimar quantas centenas, dezenas e unidades ele poderá distribuir para diminuir o número de interações. Usando o exemplo anterior, com as devidas estimativas, o seu registro poderá ficar da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|l}
 939 & 4 \\
 - 800 & 200 \\
 \hline
 139 & \\
 - 120 & 30 \\
 \hline
 19 & \\
 - 16 & 4 \\
 \hline
 3 & 234
 \end{array}$$

### 6ª etapa - Processo euclidiano com subtrações explícitas ou processo longo

Enquanto no processo algoritmo anterior o aluno fazia a distribuição de unidades (no exemplo anterior, ele não distribuiu 2 centenas, 3 dezenas e 4 unidades, mas sim 200 unidades, 30 unidades e 4 unidades, respectivamente), após o trabalho com estimativas com a Base 10 o aluno já desenvolveu o processo mental de observar o valor posicional do algarismo que ele estimará para distribuir, e assim fará a distribuição considerando o valor posicional.

No exemplo em que se pretende dividir 939 por 4, os passos seriam os seguintes:

Em 9 centenas, quantas 4 centenas cabem? Ou quantos conjuntos de 4 centenas posso formar com 9 centenas?

$$939 \overline{) 4}$$

Como cabem 2 grupos de 4 centenas, 8 centenas serão retiradas, restando 1 centena. É importante mostrar que o 2 registrado significa que são 2 centenas, porque 9 centenas divididas em 4 partes iguais resultam em cada parte ter 2 centenas, restando 1 centena que não pode ser distribuída sem ser subdividida.

$$\begin{array}{r} 939 \overline{) 4} \\ - 8 \phantom{00} \\ \hline 1 \phantom{00} \end{array}$$

Essa 1 centena restante é unida às 3 dezenas a serem ainda distribuídas, formando 13 dezenas a serem distribuídas. Agora, a pergunta: em 13 dezenas, quantas 4 dezenas cabem? Ou quantos conjuntos de 4 dezenas posso formar com 13 centenas?

$$\begin{array}{r} 939 \overline{) 4} \\ - 8 \phantom{00} \\ \hline 13 \phantom{00} \end{array}$$

Como cabem 3 grupos de 4 dezenas, 12 dezenas serão retiradas, restando 1 dezena. O significado do 3 registrado é referente à divisão de 13 dezenas divididas em 4 partes iguais, resultando em cada parte 3 dezenas, restando 1 que não pode ser distribuída sem ser subdividida.

$$\begin{array}{r} 939 \overline{) 4} \\ - 8 \phantom{00} \\ \hline 13 \phantom{00} \\ - 12 \phantom{00} \\ \hline 1 \phantom{00} \end{array}$$

Essa 1 dezena restante é unida às 9 unidades a serem ainda distribuídas, formando 19 unidades. Agora, a pergunta é: em 19 unidades, quantas 4 unidades cabem? Ou quantos conjuntos de 4 unidades posso formar com 19 unidades?

$$\begin{array}{r} 939 \overline{) 4} \\ - 8 \phantom{00} \\ \hline 13 \phantom{00} \\ - 12 \phantom{00} \\ \hline 19 \phantom{00} \end{array}$$

Como cabem 4 grupos de 4 unidades, 16 unidades serão retiradas, restando 3 unidades. O significado do 4 registrado é referente à divisão de 19 unidades em 4 partes iguais, resultando cada parte em 4 unidades, restando 3, que não podem ser subdivididas.

$$\begin{array}{r} 939 \overline{) 4} \\ - 8 \phantom{00} \\ \hline 13 \phantom{00} \\ - 12 \phantom{00} \\ \hline 19 \phantom{00} \\ - 16 \phantom{00} \\ \hline 3 \phantom{00} \end{array}$$

Nesta etapa, é comum encontrar professores que colocam marcações indicando os valores posicionais (usando as letras C, D e U para marcar as centenas, dezenas e unidades, respectivamente). No entanto, isso deve ser usado apenas na fase inicial do processo, uma vez que, para atribuir significado aos procedimentos, o aluno deve ter essa visualização bem consolidada.

Outro momento em que essas marcações podem ser necessárias é quando o divisor ou o dividendo são compostos pelo algarismo zero. É o caso, por exemplo, da divisão de 1578 por 15. Inicialmente, os alunos perceberão que o número 1578 é composto por 1 milhar, 5 centenas, 7 dezenas e 8 unidades. Diante disso, poderá seguir as seguintes etapas:

O aluno perceberá que não poderá dividir essa unidade de milhar em 15 partes e entenderá a necessidade de trocá-la por 10 centenas. Diante disso, a visualização do aluno será de que 1578 é composto por 15 centenas, 7 dezenas e 8 unidades. Assim, poderá indagar: “quanto resulta a divisão de 15 centenas em 15 partes iguais?”

$$1578 \overline{) 15}$$

Como cada parte terá apenas 1 centena, esse é o valor a ser registrado e como são retiradas 15 centenas do total, não restarão centenas no grupo inicial. Por isso, a quantidade registrada será zero.

$$\begin{array}{r} 1578 \overline{) 15} \\ - 15 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{0} \end{array}$$

Para continuar, o aluno perceberá que não é possível dividir as 7 dezenas em 15 partes iguais, sem que as transforme em 70 unidades.

$$\begin{array}{r} 1578 \overline{) 15} \\ - 15 \phantom{0} \\ \hline 07 \phantom{0} \end{array}$$

Essas 70 unidades deverão se unidas às 8 unidades existentes, totalizando 78 unidades. Agora, a pergunta é: “quanto resulta a divisão de 78 unidades em 15 partes iguais?”

$$\begin{array}{r} 1578 \overline{) 15} \\ - 15 \phantom{0} \\ \hline 078 \phantom{0} \end{array}$$

Diante dessa pergunta, a resposta será 5 unidades. Mas, caso o aluno registre 5 ao lado do valor 1, o número composto será 15. Por isso é importante o registro do 0 (zero) antes de registrar o 5, uma vez que a distribuição é de unidades. Como são retiradas 75 unidades do total, restarão 3 unidades que não serão divididas.

$$\begin{array}{r} 1578 \overline{) 15} \\ - 15 \phantom{0} \\ \hline 078 \phantom{0} \\ - 75 \phantom{0} \\ \hline 3 \phantom{0} \end{array}$$

É importante salientar que, com esse processo, não há preocupações com o número de algarismos que compõem o dividendo e o divisor.

### 7ª etapa - Processo euclidiano ou processo curto

O processo curto de divisão segue a mesma lógica do processo longo, porém as subtrações não são registradas, mas feitas apenas mentalmente. São registrados apenas os resultados das sucessivas subtrações.

A seguir, encontram-se os passos da divisão de 874 por 6. Na primeira coluna estão os procedimentos usados no Processo longo e na segunda, os procedimentos do Processo curto.

|                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \end{array}$                                                                                                                                                         | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \end{array}$                                                                                                |
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ - 6 \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 2 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$                                                                                  | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ 2 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$                                                    |
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ - 6 \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 27 \phantom{00} \end{array}$                                                                                              | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ 27 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$                                                                |
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ - 6 \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 27 \phantom{00} \\ - 24 \phantom{00} \\ \hline 3 \phantom{00} \end{array}$                                                | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ 27 \phantom{00} \phantom{00} \\ 3 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$                                 |
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ - 6 \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 27 \phantom{00} \\ - 24 \phantom{00} \\ \hline 34 \phantom{00} \end{array}$                                               | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ 27 \phantom{00} \phantom{00} \\ 34 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$                                |
| $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ - 6 \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 27 \phantom{00} \\ - 24 \phantom{00} \\ \hline 34 \phantom{00} \\ - 30 \phantom{00} \\ \hline 4 \phantom{00} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 874 \overline{) 6} \\ 27 \phantom{00} \phantom{00} \\ 34 \phantom{00} \phantom{00} \\ 4 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$ |

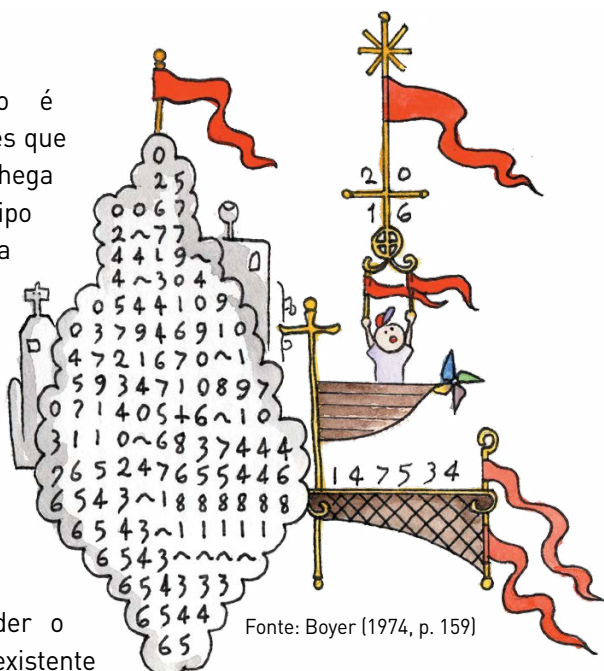
### 7.3) Algoritmos da divisão presentes em outras culturas na história da Humanidade

#### • Método galeão

O desenvolvimento desse algoritmo é caracterizado por um conjunto de iterações que replicam e riscam números. Quando chega ao resultado, sua aparência lembra um tipo de embarcação antiga, conhecida à época como galeão, que dá nome ao processo.

A história de sua difusão mostra o quanto os algoritmos perpassaram por diferentes culturas e em diferentes épocas. Segundo Boyer (1996), seus primeiros registros datam do século XII, na Índia, chegando à região que seria a atual Arábia Saudita no século XIV e depois à Itália, no século XV.

Uma excelente tarefa é, após entender o método do galeão, estabelecer a relação existente entre ele e o processo curto da divisão, apresentado anteriormente.



Haddad<sup>5</sup> (2015, p. 13) mostra os procedimentos para dividir 44977 por 382.

- Escreve-se o divisor à esquerda do dividendo e obtém-se o primeiro algarismo do quociente ( $449 : 382$ ), que é 1, e o anotamos à direita do dividendo.
- $382 \mid 44977 \mid 1$
- Em seguida, anotamos o produto de 1 por 382, que é 382, abaixo de 449.
- Faz-se a subtração da esquerda para a direita e colocamos o resultado acima do dividendo. E vamos riscando os algarismos, conforme eles estiverem sendo usados.
- Assim:  $4 - 3 = 1$ . Depois, como não dá para subtrair 8 de 4, agrupa-se o 1 que estava acima e faz-se a diferença:  $14 - 8 = 6$ . Riscam-se o 1, o 4 e o 8, e escrevemos 6 acima do segundo 4.
- Faz-se a operação:  $9 - 2 = 7$ . Riscam-se o 9 e o 2 e escreve-se 7 acima do 9.
- Vejamos como fica:

$$\begin{array}{r|l}
 382 & \begin{array}{r}
 \cancel{4}67 \\
 \cancel{44}977 \\
 \cancel{382} \\
 \hline
 \end{array} & 1
 \end{array}$$

5 - HADDAD, Valéria Rêgo. Materiais manipuláveis: uma intervenção em sala de aula para a divisão euclidiana. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015.

O dividendo resultante do passo anterior é 6777, que são os algarismos que não estão riscados. Para obter o próximo algarismo do quociente, fazemos  $677 : 382$ , que resulta em 1.

- Escreve-se o produto de 1 por 382, que é 382, sendo o 3 embaixo do 8, o 8 embaixo do 2, e o 2 abaixo do 7.
- Faz-se mentalmente a subtração  $6 - 3 = 3$ . Riscamos estes dois números e escrevemos o resultado acima do 6.
- Como não dá para subtrair 8 de 7, risca-se o 3, escreve-se o 2 acima do 3 e subtrai-se:  $17 - 8 = 9$ . Risca-se o 7, o 8, e escreve-se o resultado, 9, acima do 7. Em seguida, calcula-se  $7 - 2 = 5$ . Riscamos o 7 e o 2 e escrevemos 5 acima do 7.

Vejam, agora, como ficou:

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \cancel{3}9 \\
 \cancel{1}\cancel{6}\cancel{7}5 \\
 \cancel{4}\cancel{4}\cancel{9}\cancel{7}7 \\
 \cancel{3}\cancel{8}\cancel{2}2 \\
 \cancel{3}8
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 382 \quad \bigg| \quad 11
 \end{array}$$

O dividendo do passo anterior é 2957, que são os algarismos que não estão riscados, lidos de cima para baixo, na coluna do meio. Para obter o próximo algarismo do quociente, fazemos  $2957 : 382$ , que resulta em 7.

- Escreve-se o produto de 7 por 382, que é 2674, sendo o 2 embaixo do 3, o 6 embaixo do 8, o 7 embaixo do 2, e o 4 embaixo do 7.
- Fazemos a subtração  $2 - 2 = 0$ , e riscamos os dois 2. Depois:  $9 - 6 = 3$ , e riscamos o 9 e o 6. Como não podemos subtrair 7 de 5, riscamos o 3 que acabou de ser colocado e escrevemos 2 acima dele e calculamos:  $15 - 7 = 8$ . Riscam-se o 5, o 7, e escreve-se 8 acima do 5.
- Faz-se  $7 - 4 = 3$ . Riscamos o 7 e o 4 e escrevemos 3 acima do 7.
- Depois desses passos, ficará assim:

$$\begin{array}{c}
 \text{Resto} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \cancel{2}\cancel{9}8 \\
 \cancel{6}\cancel{7}53 \\
 \cancel{4}\cancel{4}\cancel{9}\cancel{7}7 \\
 \cancel{3}\cancel{8}\cancel{2}24 \\
 \cancel{3}\cancel{8}7 \\
 \cancel{2}6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 382 \quad \bigg| \quad 117 \\
 \text{Divisor} \quad \quad \quad \text{Quociente}
 \end{array}
 \end{array}$$

Dividendo

## • Método egípcio

Estudar o método egípcio para a divisão é algo que vai ativar a curiosidade dos alunos pela sua simplicidade. O método consiste em fazer uma tabela com duas colunas.

**1ª Etapa** - Em uma das colunas, que fica à direita, o primeiro número deve ser o divisor e nas linhas abaixo dele deve ser colocado o dobro da linha anterior até que esse número não ultrapasse o dividendo e chegue ao valor que fica o mais próximo possível dele.

**2ª Etapa** - Na segunda coluna, que fica à esquerda, é feito o mesmo procedimento colocando na linha de baixo o dobro do número que está na linha acima, mas o primeiro número é 1.

**3ª Etapa** - Da coluna da direita, onde estão as duplicações do divisor, são selecionados os números que somados não excedam ao dividendo e mais se aproximem de seu valor.

**4ª Etapa** - A soma dos números da coluna esquerda que estão ao lado dos números selecionados é o resultado da divisão.

**5ª Etapa** - No caso de a soma não ser exata, o resto da divisão é a diferença entre o dividendo e a soma encontrada na etapa 4.

Zuffi e Feliciano (2005)<sup>6</sup> trazem exemplos desse procedimento egípcio. Um para a divisão exata e outro para a divisão inexata.

### Exemplo de divisão exata

- a) Dividiremos 184 por 8
- b) Duplicações do divisor: 8, 16, 32, 64, 128
- c) Duplicações do 1: 1, 2, 4, 8, 16
- d) Tabela

|    |     |
|----|-----|
| 1  | 8   |
| 2  | 16  |
| 4  | 32  |
| 8  | 64  |
| 16 | 128 |

- e) Os números somados que resultam em 184: 8, 16, 32 e 128
- f) Os números correspondentes na coluna da esquerda são: 1, 2, 4 e 16
- g) O resultado da divisão é  $1 + 2 + 4 + 16 = 22$
- h) Como a soma ficou igual a 184, o resto é zero.

### Exemplo de divisão inexata

- a) Dividiremos 132 por 9
- b) Duplicações do divisor: 9, 18, 36, 72
- c) Duplicações do 1: 1, 2, 4, 8
- d) Tabela

|   |     |
|---|-----|
| 1 | 9   |
| 2 | 36  |
| 4 | 72  |
| 8 | 144 |

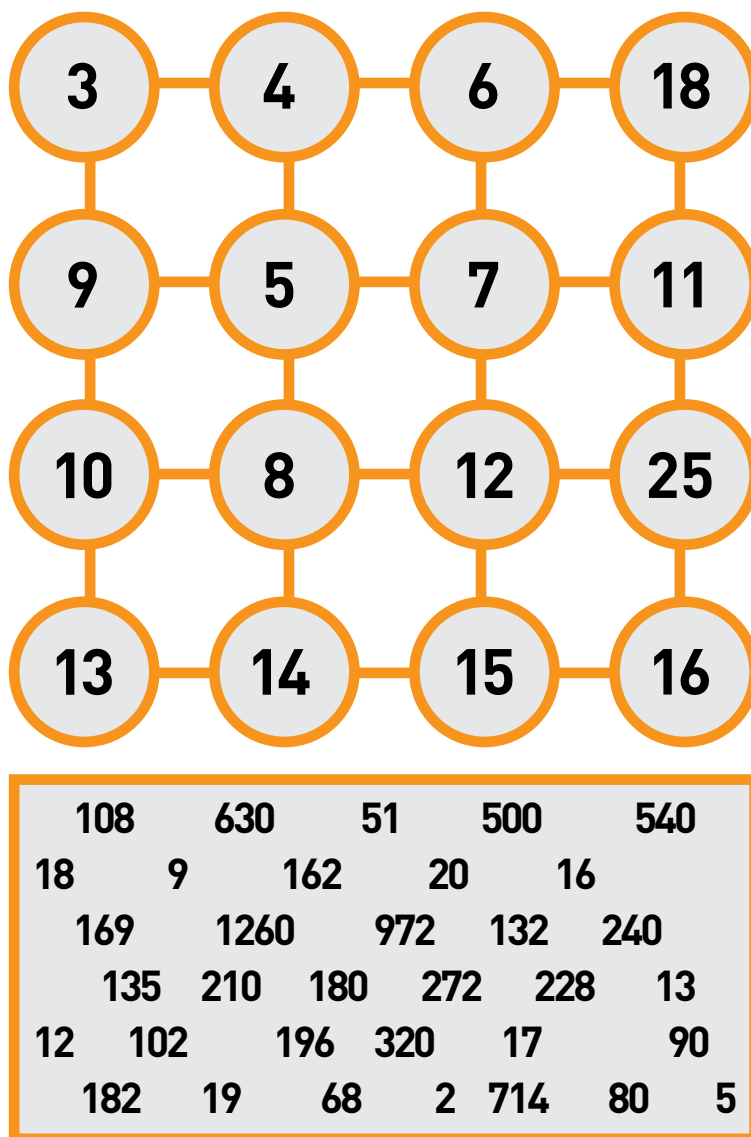
- e) Os números somados que se aproximam de 132 sem excedê-lo:  
 $18 + 36 + 72 = 126$
- f) Os números correspondentes na coluna da esquerda são: 2, 4 e 8
- g) O resultado da divisão é  $2 + 4 + 8 = 14$
- h) A diferença entre 132 e 126 é 6, o valor do resto da divisão.

6 - ZUFFI, Edna Maura; FELICIANO, Lucas Factor. Uma sequência didática com uso de história da matemática: o método de multiplicação e divisão egípcio. Revista de Educação Matemática. SBEM. v. 9, n. 1, p. 55, 2005

#### 7.4) Divisão em Linha: exemplo de jogo envolvendo a divisão

Este jogo se caracteriza pelo uso de estratégias. Por isso, os alunos devem ser estimulados a não apenas fazer as marcações, mas principalmente explicitarem as estratégias.

Quando o jogo é usado na sala de aula, é inevitável haver competição. Porém, a vitória não deve ser enaltecida. O mais importante é a aprendizagem. Os alunos devem ser estimulados a ajudar os colegas, pois a maior vitória, nesse momento, é a máxima aprendizagem possível e de todos. Lembrando que essa frase (“a máxima aprendizagem possível e de todos”) é a que melhor retrata a excelência em educação, pois esse propósito é o que torna real a equidade na educação e na aprendizagem matemática.



## **Objetivos**

Trabalhar com o conceito de divisão de números naturais e desenvolver processos de estimativa e cálculo mental.

## **Materiais necessários**

Oito marcadores vermelhos e oito azuis.

## **Como se joga**

1. Cada jogador ou dupla escolhe uma cor de ficha.
2. Os jogadores decidem quem inicia o jogo.
3. Na sua vez de jogar, o jogador escolhe dois números de dentro do quadro de números e divide-os.
4. Se a resposta da divisão estiver no tabuleiro, o jogador cobre o número com uma ficha da cor que escolheu.
5. O primeiro jogador ou dupla que alinhar quatro fichas na horizontal, vertical ou diagonal será o vencedor.

Fonte: Secretaria de Educação do estado do Paraná. Acessível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=50>

Abstract background featuring various mathematical symbols and numbers in white, including percentages, fractions, and algebraic expressions, set against a brown field with a repeating pattern of small numbers.

# 8

## Pensamento aritmético com frações

Garantir a aprendizagem de frações tem sido um dos maiores desafios para os professores que ensinam a Matemática. Ao mesmo tempo, pesquisas semelhantes às que foram desenvolvidas por Nye, Konstantopoulos e HEDGES (2004)<sup>7</sup> e Ball, Hill e Bass (2005)<sup>8</sup> mostram que o conhecimento do professor é o fator, dentre os que podem ser controlados, que tem maior impacto na aprendizagem dos alunos. Este contexto permite inferir a importância do desenvolvimento do conhecimento dos professores para que os alunos possam aprender frações.

A fração é um dos tópicos mais complexos da Matemática, dada sua forte conexão com diversos outros, como Números e Medidas.

*Os números racionais, seus diferentes significados, representações e usos são considerados um dos tópicos matemáticos mais complexos a serem trabalhados na Educação Básica. Em particular, compreender (conhecer em toda a sua dimensão) os números racionais em sua representação fracionária está associado ao desenvolvimento de estruturas cognitivas fundamentais para a aprendizagem matemática (PINTO; RIBEIRO, 2013; GARCIA SILVA; PIETROPAOLO; PINHEIRO, 2016). Nesse sentido, o estudo das frações é importante em termos práticos, porque possibilita o aperfeiçoamento da habilidade de dividir e a melhor compreensão e manipulação dos problemas do mundo real (CAMPOS; RODRIGUES, 2007); em termos psicológicos, proporciona ao aluno expandir suas estruturas mentais para um desenvolvimento intelectual contínuo, e na perspectiva matemática a compreensão do número racional fornece a base para aprendizagens futuras, como operações algébricas elementares. (ALMEIDA e RIBEIRO, 2019, p. 129)<sup>9</sup>*

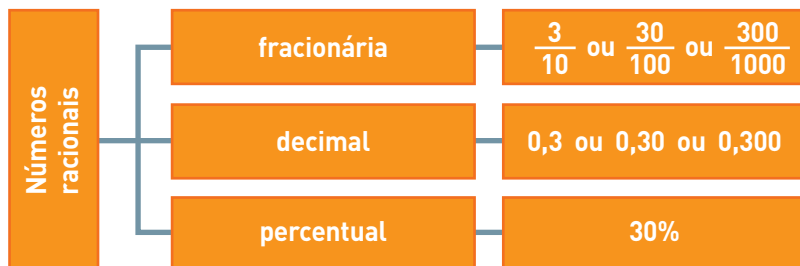
7 - NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. How large are teacher effects? Educational evaluation and policy analysis. v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

8 - BALL, D.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, n. Fall, p. 14-46, 2005.

9 - ALMEIDA, Alessandra R.; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática no Tópico das Frações: Discutindo Quantidades. Trilhas Pedagógicas, v. 9, n. 11, Ago. 2019

O rompimento dessas conexões leva à perda de seus significados e, portanto, dificulta sua aprendizagem. Uma dessas ideias equivocadas é considerar a fração como um capítulo isolado dos “números naturais” e dos “números decimais”.

Antes de tudo é importante saber que a fração é uma das três possíveis formas de representação de um número racional. As outras duas formas de representação são a decimal e a percentual, ou seja, antes de se construir os conceitos de fração.



Outra ideia equivocada é aquela que associa a fração unicamente ao significado de parte-todo. Há cinco diferentes significados para a fração: parte-todo, medida, quociente, operador multiplicativo e razão. Assim como ocorre nas operações aritméticas, esses diferentes significados remetem a específicos usos da linguagem usada e formas de representação, e estão associados a determinados contextos ou problemas de enredo, na terminologia usada por Kamii e Declark (1994).

Há uma série de outras ideias a serem desconstruídas com relação ao ensino de frações, mas a última é que será aqui destacada. Um estudo realizado por Andersen-Pence et al (2014)<sup>10</sup> mostra que:

*Apenas a apresentação de figuras não garante que os alunos possam gerar com sucesso suas próprias visualizações ou usar as formas de representação pictórica fornecidas para resolver com precisão os problemas de matemática. As análises sugerem que conceitos errôneos comuns se relacionam à maneira como um aluno interpreta a representação pictórica dada ou sua própria representação da situação. As diferenças nas soluções escritas dos alunos podem ser influenciadas por estratégias de ensino ou pelas representações matemáticas, incluindo aquelas presentes no cotidiano. Nossa hipótese é que, quando os alunos tiverem uma sólida compreensão das situações matemáticas do mundo real, poderão criar e interpretar suas representações com sucesso para entender a matemática. À medida que os alunos manipulam objetos mentais e consideram aplicações do mundo real, eles participam ativamente de sua própria construção de conhecimento e desenvolvem habilidades de visualização. (p. 14)*

10 - ANDERSON-PENCE, Katie L. et al. Relationships Between Visual Static Models and Students' Written Solutions to Fraction Tasks. International Journal for Mathematics Teaching & Learning, 2014.

Essas representações comumente presentes nos livros didáticos, jogos e objetos virtuais que colocam foco na aplicação de regras sem significado levam à construção precária da noção de números racionais e, consequentemente, das frações.

Este capítulo traz elementos que permitirão a superação desses obstáculos à aprendizagem de frações.

### 8.1) O que dizem as habilidades especificadas na BNCC sobre as frações?

Responder a essa pergunta requer uma análise aprofundada do quadro a seguir, que traz as habilidades relacionadas às frações presentes na BNCC. Duas delas não foram elencadas neste quadro por remeterem a tópicos de probabilidade e sistema monetário, o que levaria a um distanciamento dos objetivos estabelecidos para este módulo do curso.

| Ano | Objetos de conhecimento                                                                                                                                | Habilidades relacionadas às frações                                                                                                                                                                                                                      |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4º  | Números racionais: frações unitárias mais usuais ( $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$ , $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ ). | (EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ( $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$ , $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ ) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. |
| 5º  | Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica.                               | (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.                                                       |
| 5º  | Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica.                                                                     | (EF05MA02) Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do Sistema de Numeração Decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.                          |
| 5º  | Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.                              | (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.                                                                                                                                                                                                             |
| 5º  | Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.                              | (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.                                                                                                             |

Como pode ser percebido, são apenas cinco habilidades, mas se forem analisadas as conexões com outros conhecimentos, não explícitas, muito trabalho deve ser desenvolvido. Outra observação importante é a confirmação da indissociabilidade entre fração e números racionais (já explicitada na introdução desse capítulo), a comparação entre números racionais, a representação na reta, entre as representações fracionária e decimal e a presença apenas das ideias parte-todo e de divisão, desconsiderando as demais ideias inerentes às frações, sem as quais, dificulta o entendimento de contextos cotidianos. Cada um desses tópicos será tratado nas próximas seções.

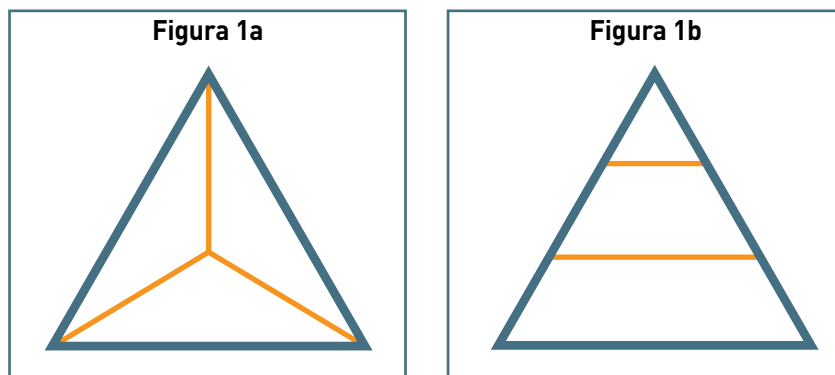
## 8.2) Os cinco significados das frações

### • *Significado de parte-todo*

Este significado ajuda a compreender os demais significados e, por isso, sua aprendizagem é muito importante. A ideia subjacente a este significado é a divisão de um todo em determinado número de partes iguais. Isso quer dizer que um todo pode ser dividido em 2 partes, 3 partes, 4 partes, 10 partes e, de forma genérica, em “n” partes. A representação dessas divisões é:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{n}$ , respectivamente.

Em cada uma dessas situações há um todo que está sendo dividido em partes iguais. Algo que parece bastante simples, mas não é.

Observe as duas situações indicadas a seguir:



Um primeiro aspecto a ser explicitado é que em ambas as figuras houve uma divisão em partes iguais. Porém, na Figura 1a a superfície do triângulo foi dividida em partes iguais, enquanto na Figura 1b a altura do triângulo foi dividida em partes iguais.

Como pode ser percebido, isso não é algo trivial e remete às noções de Grandezas e Medidas, envolvendo área e comprimento, respectivamente.

Outro aspecto, também nada trivial, diz respeito ao que está sendo tomado como a unidade a ser dividida. O todo assumido na Figura 1a é a superfície e na Figura 1b, a altura.

O terceiro aspecto relacionado a essas figuras diz respeito ao que o símbolo 1 nessa fração  $\frac{1}{3}$  está representando e o que ele significa. O símbolo 1 tem, agora, um significado diferente do que tinha, quando era trabalhado como um número natural, ou seja, pertencente ao conjunto dos números naturais. Na fração, uma das representações de um número racional, esse 1 representa uma unidade, considerando tudo aquilo que é considerado uma unidade. Na Figura 1a, o 1 representa uma área desse triângulo, que poderia ser, por exemplo, de  $15 \text{ cm}^2$ . Ou seja, o 1 passa a ser um valor relativo ao que é o todo.

Esse conhecimento, também nada comum, é essencial para quando a fração assumir o significado de operador, quando será perguntado ao aluno qual seria o valor de  $\frac{1}{3}$  da área. Além disso, a fração nesse contexto também passa a ser uma medida, outro significado a ela atribuído.

Por último, entra em cena um aspecto pouco explorado e, até mesmo, pouco conhecido por muitos professores: a ideia de todo contínuo e todo discreto. Quando o todo estiver associado a uma grandeza contínua, ele pode ser dividido em quantas partes iguais forem desejadas e, da mesma maneira, ainda pode ser subdividido.

A ideia de todo contínuo está associada às representações mais comumente presentes na sala de aula, quando são usadas figuras de retângulos, as pizzas e as barras de chocolate.

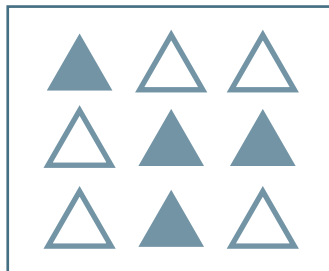
Mas essas figuras não são adequadas para representar situações em que o todo é associado a uma grandeza discreta, como por exemplo o número de bolas esportivas à disposição do professor de educação física em uma escola.

Uma situação que representa esse contexto seria: “o professor de educação física tem nove bolas de futebol e vai distribuí-las igualmente entre os quatro grupos de alunos que formou?” Em situações como essa, o modelo é discreto e permite apenas fazer a distribuição e efetuar a contagem.

Em ambas as situações, o desafio está em definir o que é o todo ou qual é a quantidade que será o todo, representado pelo símbolo 1.

## Exercício

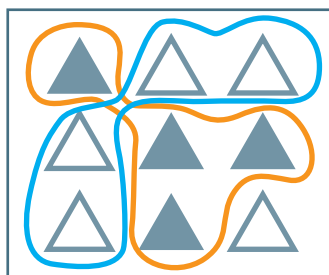
Um bom exercício para exercitar as “Conversas numéricas” com professores (não com alunos em processo de aprendizagem de frações) é perguntar-lhes: quais frações você observa na figura abaixo?



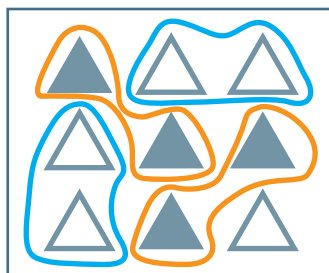
Provavelmente as respostas seriam de  $\frac{4}{9}$  ou de  $\frac{5}{9}$ . Ambas as respostas indicam que o todo foi assumido como os 9 triângulos desenhados e  $\frac{4}{9}$  indica o número de triângulos pretos em relação a esse todo e  $\frac{5}{9}$  o número de triângulos brancos em relação a esse mesmo todo.

No entanto, dentre outras, poderiam aparecer respostas como:

- 1 e  $1\frac{1}{4}$  (ou 1,25), caso o todo seja considerado quatro triângulos



- 2 e  $2\frac{1}{2}$  (ou 2,5), caso o todo seja considerado quatro triângulos



- $\frac{4}{5}$  considerando 4 triângulos pretos para cada 5 brancos (outro significado de fração que não é parte todo).

Trabalhar apenas com todo contínuo é inicialmente mais fácil, mas quando assim é feito, logo em seguida, diante das frações impróprias (quando o numerador é maior que o denominador) e das frações mistas, as dificuldades ficam quase insuperáveis.

Merline (2005, p. 28) apresenta dois exemplos que elucidam o significado de parte-todo.

| Quantidade contínua                                                                                                                                        | Quantidade discreta                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 3 partes e deu 2 partes para Maurício. Que fração representa a parte de chocolates que Maurício recebeu? | Na loja há 2 bonés vermelhos e 1 boné azul de mesmo tamanho e formato. Que fração representa a quantidade de bonés vermelhos em relação ao total de bonés da loja? |

### • Significado de medida

Assim como na divisão como operação, na fração existe o significado de quanto cabe. Para isso, uma medida é usada como referência para se determinar quanto cabe. Ou seja, o denominador da fração é tomado como unidade de medida.

Para Campos e Rodrigues (2007) <sup>11</sup>,

*Essa ideia está fortemente associada ao tratamento de grandezas contínuas, que não podem ser contadas, mas comparadas com um padrão previamente estabelecido, ou seja, uma unidade de comparação. Esse problema, que hoje denominamos “expressar a medida de uma grandeza em relação a um padrão”, teria solução imediata, obtida por um quociente, sempre que a grandeza tomada como padrão coubesse um número exato de vezes na grandeza a ser medida. Um impasse viria a surgir, porém, nas situações em que a grandeza tomada como padrão não coubesse um número exato de vezes no objeto medido. Nesse caso, tanto a unidade quanto o objeto medido deveriam ser redivididos em partes iguais e a divisão entre esses números de partes não seria exata, e, portanto, impossível. (p. 68)*

11 - CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007.

A seguir, dois exemplos que elucidam o significado de medida das frações.

| Quantidade contínua                                                                                                                                                                                                                                                      | Quantidade discreta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Para preparar um composto para a adubação de uma horta orgânica devem ser colocados dois litros de água para cada litro de chorume produzido na composteira familiar. Que fração representa a medida de chorume em relação ao total do composto que será usado na horta? | Na sala de aula de Bruna há mais meninas que meninos. Por esse motivo, visando a apresentação do final do ano, a professora organizou uma dança com dez trios formados por duas meninas e um menino. Com essa organização, todos os trios ficaram completos e não sobrou ninguém. Que fração representa o número de meninos em relação ao total de alunos na sala? |

Esse significado, por permitir a comparação, é um recurso auxiliar para a localização dos números racionais na reta numérica.

### • Significado de quociente

Este significado está diretamente ligado à ideia de repartição. A fração carrega assim a noção de resultado de uma divisão em partes iguais.

Esse significado permite a compreensão das dízimas periódicas, a correspondência direta à forma decimal de representação de número racional (consequentemente à forma percentual) e à equivalência de frações.

O resultado de  $\frac{2}{3}$  é igual a 0,66666...

O resultado de  $\frac{1}{5}$  é igual a 0,2, que é igual a  $\frac{2}{10}$ , que é igual a  $\frac{20}{100}$ , que é igual a 20%

Essa relação entre as formas fracionária e decimal de representar o número racional é auxiliar para a localização de números na reta numérica.

Merline (2005, p. 30) apresenta dois exemplos que elucidam o significado de quociente.

| Quantidade contínua                                                                                   | Quantidade discreta                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Divida 2 chocolates para 3 pessoas. Que fração representa o que cada pessoa vai receber de chocolate? | Tenho 30 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Que fração representa essa divisão? |

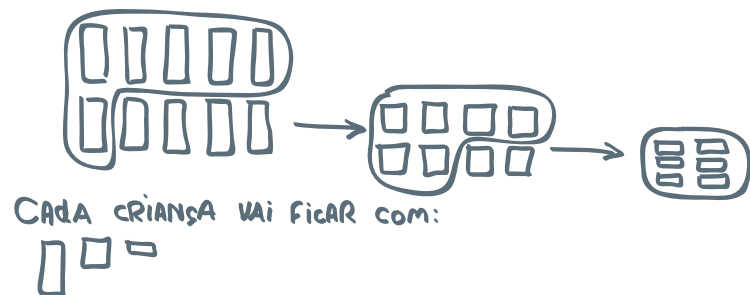
Nesse exemplo de quantidade discreta, proposto por Merline (2005), deve ser observado que a fração resultante, ou seja, o quociente deve ser um número exato. Ou seja, o numerador deve ser um múltiplo do denominador.

Deve ser lembrado que as crianças não resolvem necessariamente com números problemas semelhantes a esse exemplo com quantidade contínua, proposto por Merline (2005).

### Nem todo problema que envolve fração é resolvido com números...

Em uma pesquisa, Ribeiro e Jakobsen (2012)<sup>12</sup> analisaram a resposta dada por um aluno no início de sua escolarização ao seguinte problema: “*Que quantidade de chocolates 6 crianças ganhariam se dividíssemos as 5 barras igualmente entre elas?*”

Qualquer pessoa que conhece um pouco de fração responderia simplesmente  $\frac{5}{6}$ , no entanto, a resposta dada pela criança foi:



O pensamento da criança, registrado sem o uso de números, foi o seguinte:

- As cinco barras são divididas em duas partes iguais;
- Uma metade é distribuída para cada uma das crianças;
- As quatro metades restantes, após essa primeira distribuição, são novamente divididas em duas partes iguais;
- Novamente, as “metades das metades” são distribuídas para as crianças. Cada uma recebe, então, um quarto de uma barra. Após a distribuição restam dois pedaços de um quarto de barra;
- Cada um desses “um quarto de barra” é dividido em três partes iguais, formando assim seis pedaços com o tamanho equivalente a um doze avos da barra;
- Cada um desses seis pedaços é distribuído às seis crianças, completando assim a distribuição igualitária entre elas.

Aritmeticamente, verificando o que foi efetivamente distribuído para cada criança, o resultado seria o seguinte:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

12 - Fonte: RIBEIRO, M., JAKOBSEN, A. Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. MAJ-TATSIS, B., TATSIS, K. (Eds.), Generalization in mathematics at all educational levels. Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu, 2012.

### • Significado de operador multiplicativo

Este significado transforma um número em outro por meio de uma multiplicação (que aumenta) e por uma divisão (que diminui). Ele elimina o estranhamento gerado quando um número qualquer é multiplicado por um outro menor, resultando em um número menor que o primeiro.

Por exemplo, ao multiplicar um número qualquer por  $\frac{3}{4}$ , isso significa que esse número será aumentado em 3 vezes seu valor original e, depois, esse produto será diminuído em 4 vezes. Com ele aumentado 3 vezes e diminuído 4 vezes, o resultado é menor.

São exemplos da fração com significado de operador multiplicativo:

A seguir encontram-se dois exemplos que elucidam o significado de medida das frações.

| Quantidade contínua                                                                                                                                                                                                                                                | Quantidade discreta                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Em uma caixa d'água industrial, $\frac{1}{4}$ de seu volume deve ser reservado para uso emergencial, em caso de incêndio. Em uma caixa d'água cuja capacidade é de 20000 litros, qual é o volume que a indústria pode usar, caso o fornecimento seja interrompido? | Uma cidade tem uma frota de 240 ônibus e durante um dia de greve apenas $\frac{1}{4}$ dessa frota circulou. Quantos ônibus circularam e quantos ficaram parados? |

### • Significado de razão

Ao observar os contextos cotidianos, a razão é o significado mais comumente usado, por expressar a comparação entre duas quantidades, ou melhor, duas grandezas. É com a razão que as frações representam comparações parte-parte, parte-todo e inclusive todo-todo.

A seguir, dois exemplos que elucidam o significado de medida das frações.

| Quantidade contínua                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Quantidade discreta                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Em uma viagem para a praia, uma família percorreu uma distância de 320 km em 8h, ou seja, a velocidade média em todo o trecho foi de 40 km/h. Isso significa que, se tivessem ido com velocidade constante teriam percorrido 40 km a cada hora. Foi uma viagem muito demorada porque houve um grave acidente, que gerou um extenso congestionamento. Nesse trecho congestionado, a família percorreu apenas 20 km em 5h, ou seja, nesse trecho de congestionamento a velocidade média foi de 4 km/h. | Em sua loja, o comerciante de sapatos femininos precisa comprar 3 calçados de numeração 35 para cada 10 com numeração 38. |

No exemplo dado com grandeza contínua, a velocidade média expressa a comparação, por meio de uma divisão, entre distância e velocidade. Ambas as grandezas são contínuas. Quando calculada a velocidade do trecho todo, é feita uma comparação todo-todo. No trecho congestionado, entendendo-o como parte do trecho total da viagem, foi feita uma comparação parte-parte.

A razão se difere do significado parte-todo por comparar grandezas diferentes e não ter a ideia subjacente de divisão em partes iguais.

A razão como um dos significados da fração é importante por permitir desenvolver as noções de proporção (igualdade entre razões), levando à ideia de grandezas proporcionais e inversamente proporcionais. Permite também o desenvolvimento da interdependência, uma das ideias fundamentais da Matemática, indicadas na BNCC, que precisa ser explorada pelos professores em sua prática docente.

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. (BRASIL, 1997, p. 268)<sup>13</sup>

### 8.3) A fração interpretada como um número

Interpretar a fração como sendo um número não é um consenso entre os pesquisadores que estudam as frações. Aqueles que defendem esse uso, como por exemplo Vasconcelos (2007)<sup>14</sup>, retiram dela o valor relativo e a colocam como um outro número qualquer. Segundo essa pesquisadora:

*O sujeito frente a esse problema (situação) deverá reconhecer, a princípio, a fração  $\frac{2}{3}$  como um número (significado e não como uma superposição de dois números naturais). Deverá perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende dos princípios de ordenação (invariante) ou seja,  $\frac{2}{3}$  é um número compreendido entre 0 e 1. (VASCONCELOS, 2007, p. 36)*

Este significado foi colocado neste texto porque ele é comumente usado. No entanto, deve ficar claro que, ao não se ver o “número fracionário” na terminologia usada pela pesquisadora, retira-se o entendimento da fração como um número racional.

Olhar para a fração como um número é inevitável, pois de fato o é, mas não é um critério que permite dizer que é um significado. Para a sua representação ou localização na reta numérica, depende do significado do número como um quociente ou uma medida, a depender do contexto no qual é inserido.

13 - BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Brasília: MEC, 2016.

14 - VASCONCELOS, Isabel Cristina P. Números Fracionários: A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental. Dissertação Mestrado. 104p. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2007.

#### 8.4) Como explorar os números decimais para fazer a correspondência com as frações?

Com um trabalho desenvolvido adequadamente com o Sistema de Numeração Decimal (Módulo I deste curso) e com as operações aritméticas (desenvolvidas neste módulo), desenvolver os números decimais não representa um trabalho árduo.

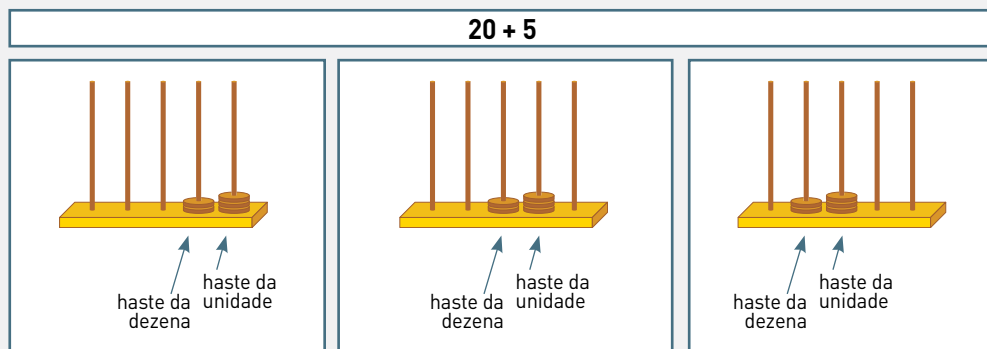
O mote deste trabalho é ressignificar a associação feita do conceito de unidade atribuída aos recursos didáticos utilizados, resgatando os conceitos de agrupamento e decomposição explorados no Sistema de Numeração Decimal e da divisão por 10.

Para isso, basta retomar a operação de divisão com resto e, inicialmente, com apoio do material dourado, questionar: “será que esse resto não poderia ser subdividido?” Certamente, os alunos diriam que seria necessário dividir o “cubinho”, até então entendido como a representação da unidade. Nesse momento, o professor pode mudar essa referência e, mostrando a “barrinha”, perguntar: “e se essa peça fosse a unidade, ela poderia ser subdividida?”. Está elaborado o conceito de décimo. Novas perguntas devem colocadas: “Se a ‘barrinha’ é agora a unidade, e o ‘cubinho’ é o décimo, o que deverá ser a ‘plaquinha’ e o cubão?”

Na sequência, com a transposição da discussão para o ábaco de haste e para o Quadro de Valor Local (QVL), o uso da vírgula e sua importância devem ser analisadas. Por isso, é importante retomar as observações feitas no item 4.5, que dizem:

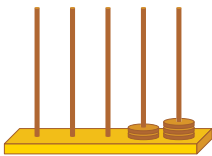
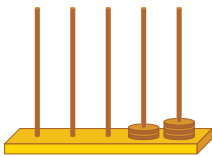
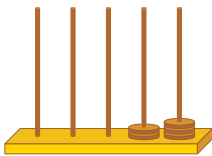
##### Relembrando o que foi visto...

No trabalho com o ábaco de haste, uma ação que deve ser evitada, apesar de comum, é a identificação fixa das posições da unidade, dezena e centena. Esse cuidado implica apagar as marcações normalmente presentes nos ábacos adquiridos comercialmente.

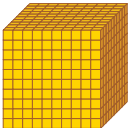
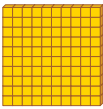
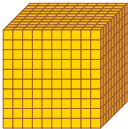
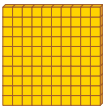
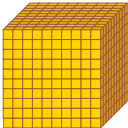
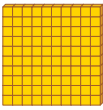


É importante que os alunos não tenham essa fixação pois, quando houver operações com números decimais, as unidades serão transformadas em décimos, centésimos e até milésimos, como mostra o quadro a seguir. A relevância desse cuidado está no fato de que uma regra válida em uma etapa da escolarização deve ser válida para todo o processo.

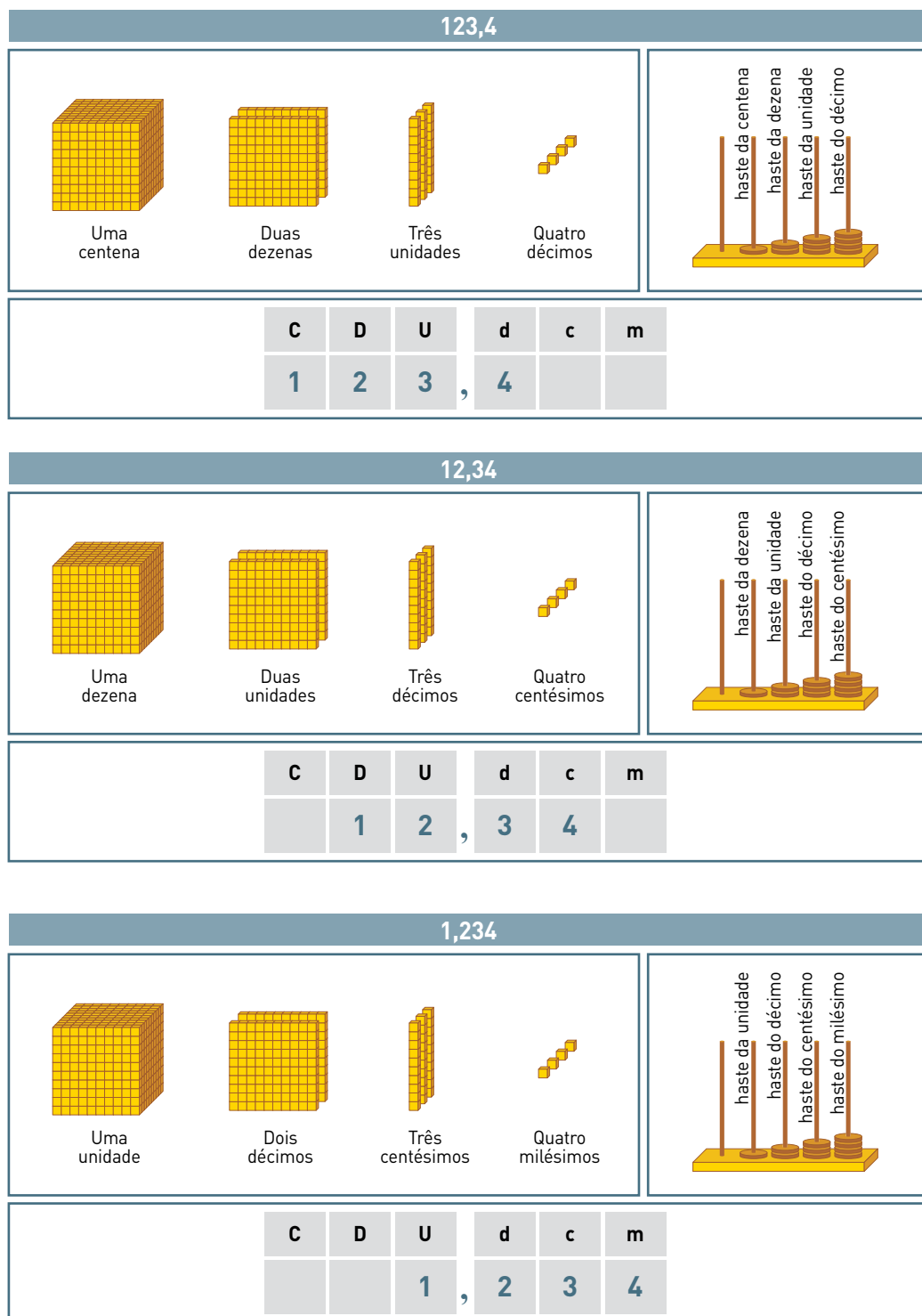
**Diferentes representações de números decimais  
modificando o valor posicional da haste**

| 2,5                                                                               | 0,25                                                                              | 0,025                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Dois inteiros e cinco décimos ou vinte e cinco décimos                            | Dois décimos e cinco centésimos ou vinte e cinco centésimos                       | Dois centésimos e cinco milésimos ou vinte e cinco milésimos                       |
|  |  |  |
| haste da unidade                                                                  | haste da unidade                                                                  | haste da unidade                                                                   |

Com essa relativização, no material dourado os significados das peças passam a ser:

|                                            |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                       |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Quando a 'barrinha' representa a unidade   |  |  |  |  |
|                                            | centena                                                                             | dezena                                                                              | unidade                                                                             | décimo                                                                                |
| Quando a 'plaquinha' representar a unidade |  |  |  |  |
|                                            | dezena                                                                              | unidade                                                                             | décimo                                                                              | centésimo                                                                             |
| Quando o "cubão" representa a unidade      |  |  |  |  |
|                                            | unidade                                                                             | décimo                                                                              | centésimo                                                                           | milésimo                                                                              |

O quadro a seguir traz a representação dos números 123,4; 12,34 e 1,234.

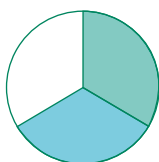


## 8.5) As múltiplas formas de interpretar as frações para operar matematicamente com elas

Tratar do ensino de frações é uma ação sempre muito complexa. Muitos fatores interferem na sua efetiva aprendizagem. Um deles está associado ao reconhecimento, à compreensão e ao adequado uso dos diferentes significados que podem ser atribuídos a uma fração. Outro fator é a mesma associação às suas diversas formas de representação de uma fração.

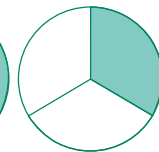
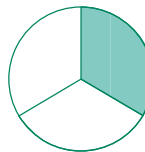
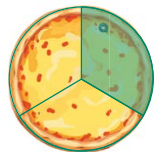
As tarefas matemáticas dadas aos alunos requerem muitas conexões e significados do mundo real, para que os alunos construam os conceitos ligados aos números racionais e suas três formas numéricas que podem representá-los. A seguir são exemplificadas diferentes representações de uma mesma fração:  $\frac{2}{3}$ .

- a) O professor disse à classe que a aula iria terminar em 40 minutos. Nesse caso, 20 minutos equivalem a  $\frac{1}{3}$  de hora.



Aqui a interpretação é de  $\frac{2}{3}$  de 1 todo, ou seja,  $1 \frac{2}{3}$

- b) Uma pizzaria oferece apenas pizzas pequenas, divididas em três partes iguais para serem servidas. Um garoto comeu um pedaço de pizza de calabresa e outro pedaço da pizza de muçarela.



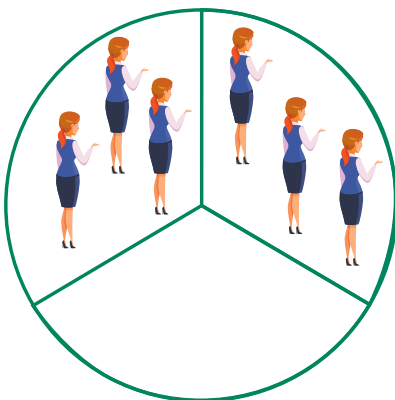
Aqui a interpretação é de que o garoto comeu  $\frac{2}{3}$  da pizza, mas entendendo que foram 2 pedaços de  $\frac{1}{3}$ , ou seja,  $2 \times \frac{1}{3}$  ou  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

- c) Em um curso de Educação Física, para cada duas mulheres há três homens inscritos para o vestibular.



Neste caso, a interpretação de  $\frac{2}{3}$  é de que há duas mulheres para cada três homens, ou seja,  $2 : 3$

- d) Na linha de produção de uma empresa trabalham 6 mulheres, que representam  $\frac{2}{3}$  do número total de funcionários que ali trabalham.



Estas são algumas das inúmeras formas de interpretar situações que envolvam a fração  $\frac{2}{3}$ . Em todas elas há uma ação mental para identificar qual é o todo, a ser usado para efetuar a operação envolvendo a fração. Como afirma Lamon (2012):

*Sob uma única fração existe um mundo de significados, múltiplas interpretações, representações e modos associados de pensar e operar. Enquanto ajudamos as crianças a construir significados alternativos para frações, veremos que essas personalidades dos números racionais fazem parte de uma complexa rede de conhecimentos, que abrange um mundo inteiro de conceitos multiplicativos. (p. 35)*<sup>15</sup>

A identificação do significado da fração envolvida no contexto e a forma de interpretá-la, diante do problema proposto, definem a operação matemática efetuada com a fração.

O propósito dessa discussão, raramente feita com os alunos, é evidenciar a fragilidade no ensino das frações, quando estas se limitam à ideia da divisão de 1 em partes iguais (indicado como  $\frac{1}{n}$ , como especificado na BNCC).

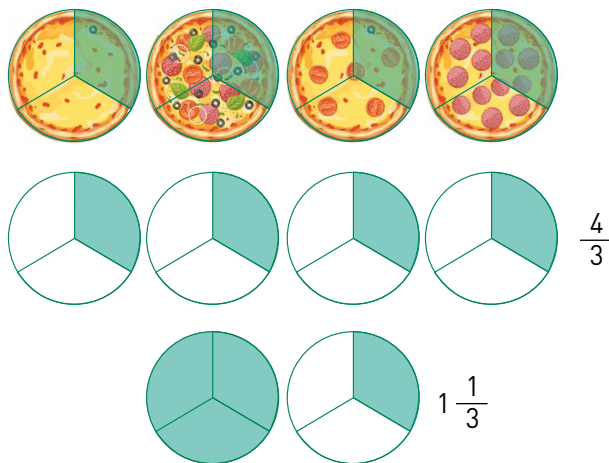
Como já explicitado, essa abordagem inicial é essencial, mas não suficiente. O significado de  $\frac{1}{n}$  é insuficiente, por exemplo, para o entendimento de uma situação em que o número de partes selecionadas (numerador) é maior que o número de partes em que o todo foi dividido (denominador). Estas situações resultam nas chamadas frações impróprias, representadas por números mistos.

---

15 - LAMON, Susan J. Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge, 2012.

Aproveitando a situação-exemplo apresentada anteriormente, como ficaria a representação fracionária da quantidade de pizza comida pelo garoto?

Uma pizzeria oferece apenas pizzas pequenas, divididas em três partes iguais para serem servidas. Um garoto comeu um pedaço de quatro pizzas de sabores diferentes.

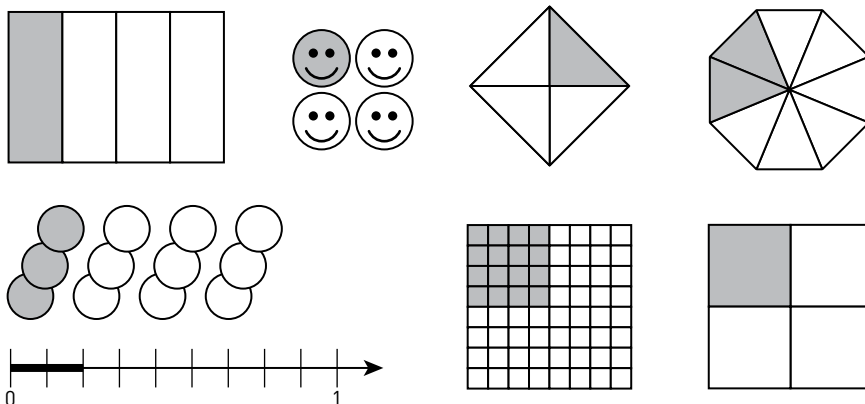


Nessa situação-exemplo, o todo considerado é a pizza, da qual o garoto comeu 4 pedaços, ou seja:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ , que resulta em  $\frac{4}{3}$ . Uma fração imprópria.

Se a união de 3 pedaços de  $\frac{1}{3}$  resulta em uma pizza, ao final o garoto comeu o equivalente a uma pizza inteira e mais  $\frac{1}{3}$ , representado pela fração imprópria  $1 \frac{1}{3}$ .

Outra ideia fundamental da Matemática, que pode ser explorada nesta situação-exemplo, é a de equivalência. Para Lamon (2012), qualquer fração tem, de maneira subjacente, a ideia do número racional, o que implica perceber, por exemplo, que  $\frac{1}{4}$  se refere à mesma quantidade  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{4}{16}$ ;  $\frac{3}{12}$  ou  $\frac{2}{8}$ , ou seja, são diferentes representações fracionárias de um único número racional.

### Representações gráficas de um mesmo número racional



Fonte: Lamon (2012, p. 30)

## 8.6) Desafios para migrar do pensamento com números absolutos para o pensamento com números relativos

Diante de qualquer um dos significados ou interpretações das frações ou números racionais, uma grande novidade é apresentada aos alunos que, até então, estavam acostumados com operações aritméticas. Nessas operações, os números são valores absolutos. Com o advento da fração, esses valores passam a ser relativos.

Para Lamon (2012), até o momento em que os alunos começam a trabalhar com as frações, eles são pensadores absolutos, pois lidam com pensamentos aditivos. Com as frações, eles precisam se tornar também pensadores relativos e precisam passar a lidar com pensamentos multiplicativos.

Segundo a autora:

*Distinguir as situações que exigem pensamento multiplicativo das que não o fazem é uma das tarefas mais difíceis para as crianças. Uma dificuldade é que nossa linguagem não nos fornece novas palavras para fazer perguntas multiplicativas. As mesmas palavras que usamos para discutir relacionamentos com números inteiros assumem diferentes significados em diferentes situações. Por exemplo, quando perguntamos “qual é maior?” no contexto da comparação de dois comprimentos, o pensamento aditivo ou absoluto é apropriado. No entanto, se perguntarmos “qual é maior?” no contexto de um problema de área ou de um problema de alargamento, é necessário um pensamento multiplicativo. Em outras palavras, parte do desafio é anexar novos significados a palavras antigas e associar contextos a operações apropriadas - aditivas ou multiplicativas. (LAMON, 2012, p. 43)*



### **Situações-problema para desenvolver o pensamento multiplicativo**

Adaptado de Lamon (2012, p. 43)

*Perguntas que requerem pensamento absoluto ou aditivo:*

- Quem tem mais bolachas, Jorge ou Marcos?
- Quantas bolachas Marcos possui a menos que Jorge?
- Quantas bolachas os meninos têm no total?

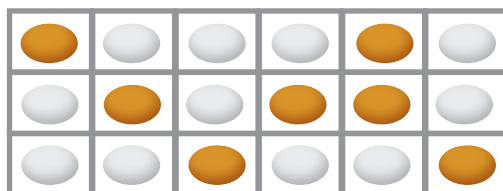
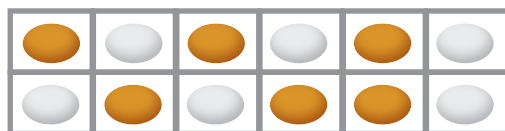
*Perguntas que requerem pensamento relativo ou multiplicativo:*

- Quantas vezes você teria que empilhar as bolachas de Jorge para obter uma pilha tão alta quanto a de Marcos?
- As bolachas de Jorge e Marcos são vendidas em pacotes com 12 bolachas. Qual a parte desse pacote cada um deles tem?
- E se as bolachas viessem em pacotes com seis unidades, que parte de um pacote cada criança possui?
- Cada garoto tem três bolachas de chocolate e as demais são de outros sabores. Qual a fração das bolachas de cada garoto que são de chocolate?
- Se Marcos comer uma bolacha por dia, quantas semanas suas bolachas durariam?
- Marcos e Jorge juntaram todas as suas bolachas e as compartilharam na hora do almoço com seus três amigos. Que parte das bolachas cada criança comerá?

Qual das famílias abaixo tem mais meninas?



Cada uma das caixas abaixo contém ovos brancos e alguns ovos marrons. Qual delas tem mais ovos marrons?



### 8.7) Representação de frações nas retas numéricas

A representação das frações na reta numérica requer que os significados de parte-todo ou de medida sejam articulados. Um mito a ser desfeito é a necessidade de se representar o zero na reta numérica. O importante é a marcação de dois pontos quaisquer de referência e os demais são determináveis.

Para a localização de  $\frac{3}{4}$  na reta numérica, usando o significado da parte-todo, as frações podem ser localizadas com a divisão em partes iguais da distância entre esses dois pontos.

- a) A fração estará localizada entre 0 e 1.



- b) A distância entre esses dois pontos deve ser dividida em 4 partes iguais.



- c) Três dessas partes são tomadas a partir do zero.



- d) A fração  $\frac{3}{4}$  é marcada na reta.



## Bibliografia

- BARRETO, Lima. **Triste fim de Policarpo Quaresma**. São Paulo: Editora Companhia das Letras, 2011.
- BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª versão. Brasília: MEC, 2016.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- CÂNDIDO, Patrícia T. **Os procedimentos pessoais de cálculo, a estimativa e o cálculo mental como caminhos para aprendizagem da adição e da subtração**. Texto de trabalho, 2019.
- CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia**. São Paulo: Ática, 2000.
- HADDAD, Valéria Rêgo. **Materiais Manipuláveis**: uma intervenção em sala de aula para a divisão euclidiana. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2015.
- HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth (Autor). **Conversas Numéricas**: Estratégias de Cálculo Mental para uma Compreensão Profunda da Matemática. Porto Alegre: Grupo A, 2019.
- JAWORSKI, B. **Investigating Mathematics Teaching**: A Constructivist Enquiry. London: The Falmer Press. 1994.
- KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Campinas: Papirus, 1994.
- KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 317-326, 1981.
- NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação**, v. 9, n. 1, 2005.
- POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- RIBEIRO, M.; MELLONE, M. e JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), **Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME, 2013.
- VAN DE WALLE, John A. Matemática no Ensino Fundamental-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Porto Alegre: Penso Editora, 2009.
- ZUFFI, Edna Maura; FELICIANO, Lucas Factor. Uma sequência didática com uso de história da matemática: o matemática: o método de multiplicação e divisão egípcio. **Revista de Educação Matemática**. SBEM. v. 9, n. 1, p. 55, 2005.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Cândido, Patrícia Terezinha  
O ensino das quatro operações aritméticas a  
serviço de uma matemática com significado :  
módulo II / Patrícia Terezinha Cândido, Adilson  
Dalben ; [coordenação Patrícia Terezinha Cândido]. --  
1. ed. -- São Paulo : Cidadela Comunicações :  
Interação Urbana, 2020.

Inclui bibliografia  
ISBN 978-65-992349-5-8

1. Aritmética - Estudo e ensino 2. Matemática -  
Estudo e ensino 3. Professores de matemática -  
Formação I. Dalben, Adilson. II. Cândido, Patrícia  
Terezinha. III. Título.

20-46936

CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Aritmética : Matemática : Estudo e ensino 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Este livro foi editado por Cidadela Editora e Act Design Gráfico nas tipologias  
Dinot regular e bold (textos) e Museo black (título), para Interação Urbana.

1ª edição / 1ª reimpressão

São Paulo, julho de 2021





Esta publicação integra o material pedagógico produzido e adotado  
pela Interação Urbana no projeto Klabin Semeando Educação.  
© Interação Urbana - Todos os direitos reservados.